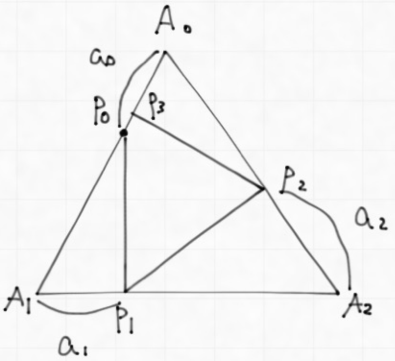
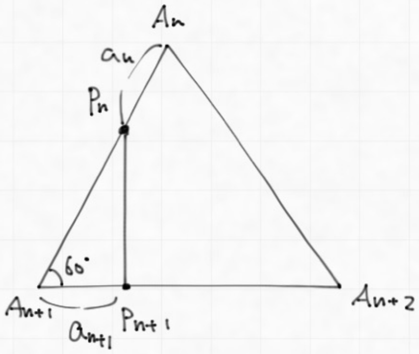
2020 大阪医大

[1]





(1) 上図左より　$P_nA_{n+1} \times \cos 60° = a_{n+1}$　だから　$a_{n+1} = (1 - a_n) \times \frac{1}{2}$

$$\boldsymbol{a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}}$$

(2) (1) より　$a_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{1}{3}\right)$

$\left\{a_n - \frac{1}{3}\right\}$ は公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列で、その一般項は

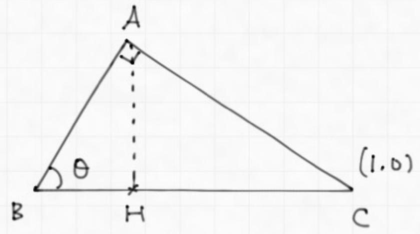
$$a_n - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(a_0 - \frac{1}{3}\right) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(a_0 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \quad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(a_0 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\right\} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

2020 大阪医大

[1]



(1) $\overline{AB} = \overline{BC}\cos\theta = \cos\theta$, $\overline{AC} = \overline{BC}\sin\theta = \sin\theta$

だから $l = \cos\theta + \sin\theta + 1$

AからBC上に下ろした垂線の足をHとすると.

$\overline{BH} = \overline{AB}\cos\theta = \cos^2\theta$

$\overline{AH} = \overline{AB}\sin\theta = \cos\theta\sin\theta$

回転体は半径AHの円を底面とする2つの円すいを合わせたものだから

$$V = \frac{1}{3}\overline{BH}\times\pi\overline{AH}^2 + \frac{1}{3}\overline{CH}\times\pi\overline{AH}^2$$

$$= \frac{1}{3}(\overline{BH}+\overline{CH})\cdot\pi\cdot(\cos\theta\sin\theta)^2 = \boldsymbol{\frac{1}{3}\pi\cos^2\theta\sin^2\theta}$$

(2) $S = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC} = \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta$

$$\frac{V}{Sl} = \frac{1}{3}\pi\cos^{\cancel{2}}\theta\sin^{\cancel{2}}\theta \times \frac{2}{\cancel{\cos\theta\sin\theta}} \times \frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta+1)} = \frac{2\pi\cos\theta\sin\theta}{3(\cos\theta+\sin\theta+1)}$$

$\cos\theta+\sin\theta = t$ とすると　$t^2 = 1+2\sin\theta\cos\theta$ だから

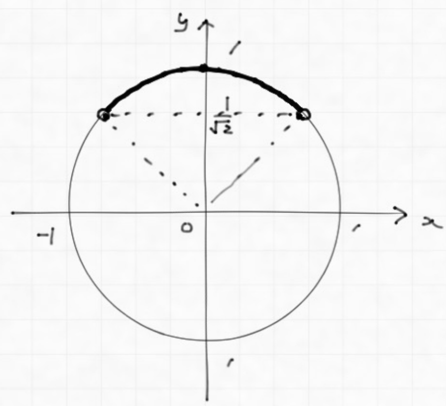
$$\frac{V}{Sl} = \frac{\cancel{2}\pi\times\frac{t^2-1}{\cancel{2}}}{3\ (t+1)} = \frac{\pi(t+1)(t-1)}{3(t+1)} = \frac{\pi}{3}(t-1)$$

ここで　$t = \cos\theta+\sin\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ であり.

$\angle A = \frac{\pi}{2}$, $\angle A+\angle B+\angle C = \pi$, $\angle B > 0$, $\angle C > 0$ より　$0 < \angle B = \theta < \frac{\pi}{2}$

で.　$\frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi$ より

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$



よって　$1 < t = \sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}$

$\frac{V}{Sl} = \frac{\pi}{3}(t-1)$ だから t が最大のとき $\frac{V}{Sl}$ も

最大，すなわち $t=\sqrt{2}$, $\theta = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$ のとき $\frac{V}{Sl}$ は最大となる

2020 大阪医大

[III]

(1) $2m$ 個の玉を全て区別する

最初の2個の玉のとり出し方は ${}_{2m}C_2$

赤青1つずつとるのは ${}_mC_1\cdot{}_mC_1$

$$\therefore\ P(A)=\frac{{}_mC_1\cdot{}_mC_1}{{}_{2m}C_2}=\frac{2m^{\cancel{2}}}{2\cancel{m}(2m-1)}=\frac{m}{2m-1}$$

最初の4個の玉のとり出し方は ${}_{2m}C_4$

赤青2つずつとるのは ${}_mC_2\ {}_mC_2$

$$\therefore\ P(B)=\frac{{}_mC_2\cdot{}_mC_2}{{}_{2m}C_4}=\frac{\cancel{m}\cancel{(m-1)}\,m(m-1)\cdot\cancel{4}\cdot3\cdot\cancel{2}}{\cancel{2m}(2m-1)\underset{2}{(\cancel{2m-2})}(2m-3)\cdot2\cdot\cancel{2}}$$

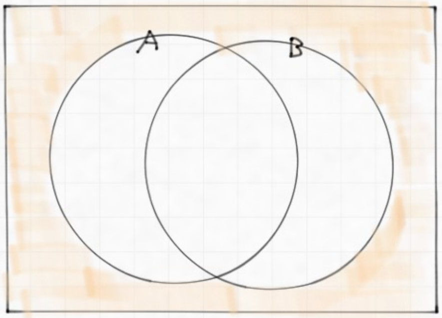
$$=\frac{3m(m-1)}{2(2m-1)(2m-3)}$$

(2) 赤,青 $m-1$ コずつから 2つ取り出すとき,

赤青1つずつとなるのは (1)の $P(A)$ で $m\to m-1$ として $\dfrac{m-1}{2m-3}$

$$\therefore\ P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=\frac{m(m-1)}{(2m-1)(2m-3)}$$

(3) $P(\overline{A\cup B})=1-\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}$



$$=1-\frac{m}{2m-1}-\frac{3m(m-1)}{2(2m-1)(2m-3)}+\frac{m(m-1)}{(2m-1)(2m-3)}$$

$$=\frac{2(2m-1)(2m-3)-2m(2m-3)-3m(m-1)+2m(m-1)}{2(2m-1)(2m-3)}$$

$$=\frac{8m^2-16m+6-4m^2+6m-3m^2+3m+2m^2-2m}{2(2m-1)(2m-3)}$$

$$=\frac{3m^2-9m+6}{2(2m-1)(2m-3)}=\frac{3(m-1)(m-2)}{2(2m-1)(2m-3)}$$

2020 大阪医大

Ⅳ (1) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ が有理数ならば互いに素な自然数 $p.q$ を用いて

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\frac{q}{p} \quad \cdots ①$$

と表すことができる。①より

$$\sqrt{b}=\frac{q}{p}-\sqrt{a}$$

両辺2乗して

$$b=\frac{q^2}{p^2}-\frac{2q}{p}\sqrt{a}+a$$

$$\frac{2q}{p}\sqrt{a}=\frac{q^2}{p^2}+a-b$$

$$\sqrt{a}=\frac{p}{2q}\left(\frac{q^2}{p^2}+a-b\right)$$

上式で右辺の $p.q$, $a.b$ は全て有理数なので $\sqrt{a}$ は有理数である

$\sqrt{b}$ についても同様.

よって $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ が有理数ならば、$\sqrt{a}$ も $\sqrt{b}$ も有理数である.

(2) $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=d$ とおく (d は有理数)

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=d-\sqrt{c}$ の両辺を2乗

$$a+b+2\sqrt{ab}=d^2-2d\sqrt{c}+c$$

$$\sqrt{4ab}+\sqrt{4d^2c}=d^2+c-a-b$$

これは $\sqrt{4ab}+\sqrt{4d^2c}$ が有理数であることを示しており (1) より $\sqrt{4ab}$, $\sqrt{4d^2c}$ は

有理数. ここで、$\sqrt{4d^2c}=2d\sqrt{c}$ となるので $\sqrt{c}$ は有理数.

同様にすることで $\sqrt{a}$. $\sqrt{b}$ も有理数であることを示せる.

よって $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ が有理数ならば $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ はいずれも有理数.

2020大阪医大

[V]

(1) $C_n(x) = \int_0^x t^n \cdot \cos t\, dt = \left[t^n \sin t \right]_0^x - \int_0^x n \cdot t^{n-1} \sin t\, dt$

$= x^n \sin x - n \int_0^x t^{n-1} \sin t\, dt \quad = \boldsymbol{x^n \sin x - n S_{n-1}(x)}$

$S_n(x) = \int_0^x t^n \sin t\, dt = \left[t^n(-\cos t) \right]_0^x - \int_0^x n \cdot t^{n-1}(-\cos t) dt$

$= \boldsymbol{-x^n \cos x + n C_{n-1}(x)}$

(2) $f_n(x) = \int_0^x t^n (\cos x \cos t + \sin x \sin t) dt$

$= \cos x \int_0^x t^n \cos t\, dt + \sin x \int_0^x t^n \sin t\, dt$

$= \cos x \left(x^n \sin x - n S_{n-1}(x) \right) + \sin x \left(-x^n \cos x + n C_{n-1}(x) \right)$

$= -n \cos x\, S_{n-1}(x) + n \sin x\, C_{n-1}(x)$

$= -n \cos x \left(-x^{n-1} \cos x + (n-1) C_{n-2}(x) \right) + n \sin x \left(x^{n-1} \sin x - (n-1) S_{n-2}(x) \right)$

$= n x^{n-1} (\sin^2 x + \cos^2 x) + n(n-1) \left\{ -\int_0^x t^{n-2} \cos t \cos x\, dt - \int_0^x t^{n-2} \sin t \sin x\, dt \right\}$

$= n x^{n-1} - n(n-1) \int_0^x \cos t \cos x + \sin t \sin x\, dt$

$= n x^{n-1} - n(n-1) \int_0^x t^{n-2} \cos(x-t) dt$

$= \boldsymbol{n x^{n-1} - n(n-1) f_{n-2}(x)}$

(3) $f_4(x) = 4x^3 - 12 f_2(x)$ より

$x^3 = \frac{1}{4} f_4(x) + 3 f_2(x)$

$= \int_0^x \frac{1}{4} t^4 \cos(x-t) dt + \int_0^x 3 t^2 \cos(x-t) dt$

$= \int_0^x \left(\frac{1}{4} t^4 + 3 t^2 \right) \cos(x-t) dt$

よって $\boldsymbol{h(t) = \frac{1}{4} t^4 + 3 t^2}$ とすれば $\int_0^x h(t) \cos(x-t) dt = x^3$ となる