2020 三重大

1 (3) $2^x = X$ とする $(X>0)$

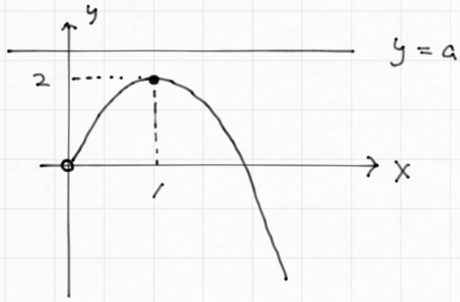
$X^3 \geqq 3X - a \quad \Leftrightarrow \quad a \geqq 3X - X^3$

$3X - X^3 = f(X)$ とすると $f'(X) = 3 - 3X^2 = 3(1-X)(1+X)$

$X>0$ における $f(X)$ の増減は右のようになる

X	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(X)$		$+$	0	$-$
$f(X)$		$\nearrow$		$\searrow$

$f(0)=0,\ f(1)=2$



$y=f(X)$ の $X>0$ の範囲のグラフは右のようになり、$y=a$ のグラフが $X>0$ の範囲で常に $y=f(X)$ の上側にあるのは $a \geqq 2$

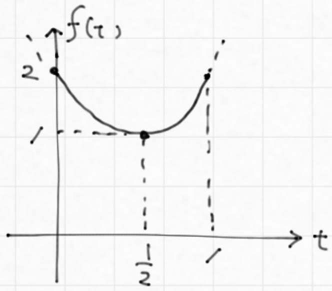
よって $2^{3x} \geqq 3\cdot 2^x - a$ が常に成り立つための条件は $\mathbf{a \geqq 2}$ である

(4) $-4\cos^2\theta - 4\sin\theta + 6 = -4(1-\sin^2\theta) - 4\sin\theta + 6 = 4\sin^2\theta - 4\sin\theta + 2 \quad \cdots ①$

ここで $\sin\theta = t$ とすると、$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より $0 \leqq \sin\theta \leqq 1$ だから $0 \leqq t \leqq 1$

① は $4t^2 - 4t + 2$ となる。これを $f(t)$ とすると、$0 \leqq t \leqq 1$ で $f(t)$ の最大値および最小値を考えれば良いので

$f(t) = 4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$



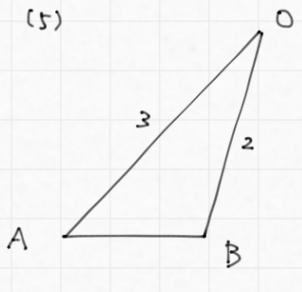
$t = \frac{1}{2}$ で最小値 **1** をとる このとき θ は

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ より $\theta = \mathbf{\frac{1}{6}\pi,\ \frac{5}{6}\pi}$

$t = 0, 1$ のとき最大値 **2** をとる。このとき θ は

$\sin\theta = 0, 1$ より $\theta = \mathbf{0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi}$

(5)



$|\vec{OP}|^2 = |-\vec{OA} + 2\vec{OB}|^2 = |\vec{OA}|^2 + 4|\vec{OB}|^2 - 4\vec{OA}\cdot\vec{OB}$

$= 9 + 16 - 4\times 4 = 9 \qquad \therefore |\vec{OP}| = \mathbf{3}$

$\vec{OP}\cdot\vec{OA} = -|\vec{OA}|^2 + 2\vec{OA}\cdot\vec{OB} = -9 + 8 = -1$

$\cos\angle AOP = \dfrac{\vec{OA}\cdot\vec{OP}}{|\vec{OA}||\vec{OP}|} = \dfrac{-1}{3\cdot 3} = -\dfrac{1}{9}$

$\sin\angle AOP = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{9}\right)^2} = \dfrac{4\sqrt{5}}{9}$

$\triangle AOP = \frac{1}{2}|\vec{OA}||\vec{OP}|\sin\angle AOP = \frac{1}{2}\times 3\times 3\times\frac{4\sqrt{5}}{9} = \mathbf{2\sqrt{5}}$

(6) カードの選び方は ${}_{2n}C_2$ 通り

小さい方のカードが $1 \sim n$ のとき、小さいカードを k とすると大きい方は $k+1 \sim k+n$ の n 通り。

〃 $n+1 \sim 2n-1$ 〃 〃 〃 $k+1 \sim 2n$ の $2n-k$ 通り

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n + \sum_{k=n+1}^{2n-1}(2n-k) = n^2 + \frac{n-1+1}{2}\times(n-1) = n^2 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$

確率は $\dfrac{\frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n}{{}_{2n}C_2} = \dfrac{\cancel{n}(3n-1)\cdot\cancel{2}}{2\cancel{n}(2n-1)\cdot\cancel{2}} = \dfrac{3n-1}{2(2n-1)}$

(7)

$$
\begin{array}{r|llll}
 & x & \sin a + 1 - e^a & & \\
\hline
x^2 + e^a x + e^a & x^3 & (\sin a + 1)x^2 + & e^a x & \\
 & x^3 & e^a x^2 & e^a x & \\
\hline
 & & (\sin a + 1 - e^a)x^2 & 0 & 0 \\
 & & (\sin a + 1 - e^a)x^2 & (\sin a + 1 - e^a)e^a x & (\sin a + 1 - e^a)e^a \\
\hline
 & & & (e^a - 1 - \sin a)x & -\ (\sin a + 1 - e^a)e^a
\end{array}
$$

余りは $(e^a - 1 - \sin a)x - (\sin a + 1 - e^a)e^a$

余りが0となるのは $e^a - 1 - \sin a = 0$ のとき.

$e^a - 1 - \sin a = h(a)$ とすると $h'(a) = e^a - \cos a$

ここで $a > 0$ のとき $e^a > 1$ だから $h'(a)$ は常に正の値をとり $h(a)$ は単調に増加する.

$h(0) = e^0 - 1 - \sin 0 = 0$ だから $a > 0$ において $h(a) > h(0) = 0$

よって $a > 0$ のとき $h(a) \neq 0$ であり $f(x)$ は $g(x)$ で割り切れない

2020 三重大

2 (1) $\alpha=0$ のとき $z^4+0\cdot z^3+0\cdot z^2+0\cdot z+0^4=0$ より $z^4=0$ すなわち $z=0$.

このとき $z^5=0$, $\alpha^5=0$ だから $z^5=\alpha^5$ は成り立つ.

$\alpha\neq 0$ のとき $z^4+\alpha z^3+\alpha^2z^2+\alpha^3z+\alpha^4=0$ の両辺を α^4 で割ると

$$\left(\frac{z}{\alpha}\right)^4+\left(\frac{z}{\alpha}\right)^3+\left(\frac{z}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{z}{\alpha}\right)+1=0$$

$\frac{z}{\alpha}=1$ のとき上式は成立しないので $\frac{z}{\alpha}\neq 1$

そこで上式に $\left(\frac{z}{\alpha}-1\right)$ をかけると

$$\left(\frac{z}{\alpha}-1\right)\left\{\left(\frac{z}{\alpha}\right)^4+\left(\frac{z}{\alpha}\right)^3+\left(\frac{z}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{z}{\alpha}\right)+1\right\}=0$$

$$\left(\frac{z}{\alpha}\right)^5-1=0$$

$$z^5=\alpha^5.$$

以上より $z^4+\alpha z^3+\alpha^2z^2+\alpha^3z+\alpha^4=0$ ならば、$z^5=\alpha^5$ であることが示された.

(2) $z^5-\alpha^5=0 \iff (z-\alpha)(z^4+z^3\alpha+z^2\alpha^2+z\alpha^3+\alpha^4)=0$

$z\neq\alpha$ のとき. $z^4+\alpha z^3+\alpha^2z^2+\alpha^3z+\alpha^4=0$ …①

z_1, z_2, z_3, z_4 は ① を満たし, かつ ① は z についての4次式だから

$$z^4+\alpha z^3+\alpha^2z^2+\alpha^3z+\alpha^4=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4) \quad \cdots ②$$

② の z の3次の係数を比較して

$\alpha=-z_1-z_2-z_3-z_4$ $\therefore$ $z_1+z_2+z_3+z_4=-\alpha$

② の z の0次の係数を比較して

$\alpha^4=z_1z_2z_3z_4$ $\therefore$ $z_1z_2z_3z_4=\alpha^4$

(3) ② で $z=\alpha$ とすると

$$5\alpha^4=(\alpha-z_1)(\alpha-z_2)(\alpha-z_3)(\alpha-z_4)$$

これより $|(\alpha-z_1)(\alpha-z_2)(\alpha-z_3)(\alpha-z_4)|=5|\alpha|^4$

$$|\alpha-z_1||\alpha-z_2||\alpha-z_3||\alpha-z_4|=5\sqrt{1+4}^{\,4}=125$$

② で $z=-\alpha$ とする

$$\alpha^4-\alpha^4+\alpha^4-\alpha^4+\alpha^4=(-\alpha-z_1)(-\alpha-z_2)(-\alpha-z_3)(-\alpha-z_4)$$

$$\alpha^4=(\alpha+z_1)(\alpha+z_2)(\alpha+z_3)(\alpha+z_4)$$

$$|\alpha+z_1||\alpha+z_2||\alpha+z_3||\alpha+z_4|=|-\alpha|^4=25$$

2020 三重大

4 (1) $I_0=\int_0^1\sqrt{x}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx=\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}\,dx$

$x-\frac{1}{2}=\frac{t}{2}$ とおくと $\frac{dt}{dx}=2$

x	$0\to1$
t	$-1\to1$

$I_0=\int_{-1}^1\sqrt{\frac{1}{4}(1-t^2)}\,\frac{1}{2}dt=2\cdot\frac{1}{2^2}\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt=\mathbf{\frac{1}{2}S}$

(2) $t=\cos\theta$ とおく

$\frac{dt}{d\theta}=-\sin\theta$

t	$0\to1$
θ	$\frac{\pi}{2}\to0$

$I_0=\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sqrt{1-\cos^2\theta}\,(-\sin\theta)\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1-\cos2\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\frac{1}{4}(0-0)=\mathbf{\frac{\pi}{8}}$

(3) $I_n=\int_0^1\sqrt{x}(1-x)^{n+\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{n+\frac{1}{2}}\right]_0^1-\frac{2}{3}\int_0^1x^{\frac{3}{2}}\times(n+\frac{1}{2})(1-x)^{n-\frac{1}{2}}\times(-1)\,dx$

$=\frac{2}{3}(n+\frac{1}{2})\int_0^1x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{n-\frac{1}{2}}dx$ …①

$I_n=\int_0^1\sqrt{x}(1-x)^{n+\frac{1}{2}}dx=\int_0^1\sqrt{x}(1-x)(1-x)^{n-\frac{1}{2}}dx$

$=\int_0^1\sqrt{x}(1-x)^{n-\frac{1}{2}}dx-\int_0^1x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{n-\frac{1}{2}}dx$ …②

② に ① より $\int_0^1x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{n-\frac{1}{2}}dx=\frac{3}{2n+1}I_n$, $\int_0^1\sqrt{x}(1-x)^{n-\frac{1}{2}}dx=I_{n-1}$ を代入

$I_n=I_{n-1}-\frac{3}{2n+1}I_n \iff \mathbf{I_n=\frac{2n+1}{2n+4}I_{n-1}}$

$I_n=\frac{2n+1}{2n+4}I_{n-1}=\frac{2n+1}{2n+4}\times\frac{2n-1}{2n+2}I_{n-2}$

$=\cdots=\frac{2n+1}{2n+4}\times\frac{2n-1}{2n+2}\times\frac{2n-2}{2n}\times\cdots\times\frac{3}{6}I_0$

$=\frac{3}{2n+4}\times\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)\times\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\times\cdots\times\frac{5}{6}I_0\leqq\frac{3}{2n+4}\times1\times1\times\cdots\times1\,I_0=\frac{3}{2n+4}I_0$

$I_0>0$ だから

$\therefore\ \frac{I_n}{I_0}\leqq\frac{3}{2n+4}$