2020 兵庫医大

$\boxed{1}$ (1) (a) $\dfrac{dy}{dx} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \times k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^{k}$

(b) (a) より

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k - \frac{1}{n!} x^n$$

$$= y - \frac{1}{n!} x^n$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{x^n}{n!\, y}$$

$$\frac{x^n}{y} = n! - \frac{n!}{y} \frac{dy}{dx}$$

両辺を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で積分

$$\int_0^1 \frac{x^n}{y} dx = \int_0^1 \left(n! - \frac{n!}{y} \frac{dy}{dx} \right) dx$$

$$= [n!\, x]_0^1 - n! \int_1^{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}} \frac{1}{y} dy$$

$$= n! - n! [\log y]_1^{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}$$

$$= n! - n! \log \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right)$$

(2) $\sin^2\theta + 2k\cos\theta + k - 2 < 0$

$\Leftrightarrow \quad 1 - \cos^2\theta + 2k\cos\theta + k - 2 < 0$

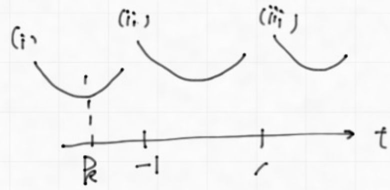
$\Leftrightarrow \quad \cos^2\theta - 2k\cos\theta - k + 1 > 0 \quad \cdots ①$

ここで $\cos\theta = t$ とおくと $0 \leqq \theta < 2\pi$ だから $-1 \leqq t \leqq 1$ で ①は

$t^2 - 2kt - k + 1 > 0 \quad \cdots ②$

と表せる。左辺を $f(t)$ と表すと、①が $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす、どんなθに対しても成り立つのは $y = f(t)$ のグラフが $-1 \leqq t \leqq 1$ で常に正の値をとるときである …(*)

(i) $k < -1$ のとき



$f(-1) > 0$ となればよいので

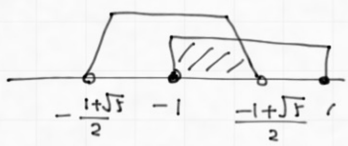
$f(-1) = 1 + 2k - k + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad k > -2$

$-2 < k < -1$

(ii) $-1 \leqq k \leqq 1$ のとき、

$f(k) = k^2 - 2k^2 - k + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 + k - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} < k < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore -1 \leqq k < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$



(iii) $k > 1$ のとき

$f(1) = 1 - 2k - k + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad k < \dfrac{2}{3}$

解なし

(i)(ii)(iii)より $-2 < k < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき (*) は成り立つ。

よって $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たすどんなθの値に対しても $\sin^2\theta + 2k\cos\theta + k - 2 < 0$ が

成り立つのは $\boldsymbol{-2 < k < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ のとき

(3)

(a) $6^4 = 36 \times 36 = 1296$ 通り

(b) 4, 3-1, 2-2, 2-1-1, 1-1-1-1 の 5通り

(c) (b)の各場合について

4 … 1通り

3-1 … ${}_4C_1$ 通り $= 4$通り

2-2 … ${}_4C_2 \times \frac{1}{2!} = 3$通り

2-1-1 … ${}_4C_2 \times {}_2C_1 \times \frac{1}{2!} = 6$通り

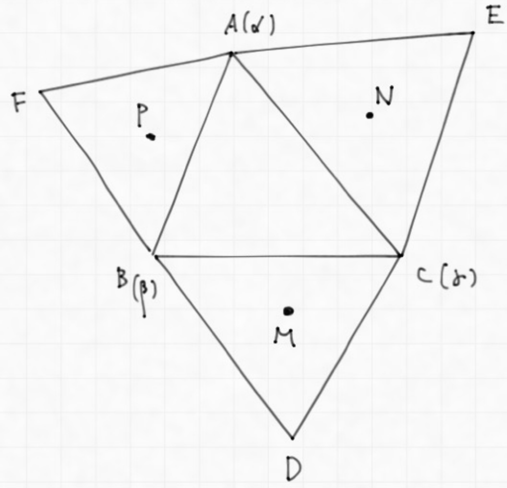
1-1-1-1 … 1通り

合計 15通り

(d) ${}_6H_4 = {}_9C_4 = \frac{9 \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6}^{2}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 126$ 通り

(e) 重複を許さず4つを選ぶ組み合わせ ${}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ 15通り

$\boxed{2}$



(1) $\omega = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ と表せる

$\omega^3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

$\iff \omega^3 + 1 = 0$

$\iff (\omega+1)(\omega^2 - \omega + 1) = 0$

$\omega + 1 \neq 0$ だから $\omega^2 - \omega + 1 = 0$ $\quad \therefore \omega^2 = \omega - 1$

(2) D, E, F を表す複素数を d, e, f とすると

D は B を C を中心に $\frac{\pi}{3}$ 回転させた点だから

$d = (\beta - \gamma)\omega + \gamma$

同様に

$e = (\gamma - \alpha)\omega + \alpha$

$f = (\alpha - \beta)\omega + \beta$

△DEF の重心を G, それを表す複素数を g として

$$g = \frac{d+e+f}{3} = \frac{(\beta-\gamma)\omega + \gamma + (\gamma - \alpha)\omega + \alpha + (\alpha - \beta)\omega + \beta}{3}$$

$$= \boldsymbol{\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}}$$

(3) $d - \alpha = \beta\omega - \gamma\omega + \gamma - \alpha$, $e - \beta = \gamma\omega - \alpha\omega + \alpha - \beta$, $f - \gamma = \alpha\omega - \beta\omega + \beta - \gamma$

$$(d-\alpha)\omega^2 = \beta\omega^3 - \gamma\omega^3 + \gamma\omega^2 - \alpha\omega^2$$

$$= -\beta + \cancel{\gamma} + \gamma(\omega \cancel{-1}) - \alpha(\omega - 1) \qquad (\because \omega^3 = -1,\ \omega^2 = \omega - 1)$$

$$= \gamma\omega - \alpha\omega + \alpha - \beta$$

$$= e - \beta$$

$\therefore \dfrac{e-\beta}{d-\alpha} = \omega^2$ より $\left|\dfrac{e-\beta}{d-\alpha}\right| = |\omega^2| = 1^2 = 1$ $\qquad \therefore AD = BE$

同様に $(e-\beta)\omega^2 = f - \gamma$ が成り立つので BE = CF $\qquad \therefore AD = BE = CF$

(4) M, N, P を表す複素数を m, n, p として

$$m = \frac{\beta + \gamma + d}{3},\quad n = \frac{\alpha + \gamma + e}{3},\quad p = \frac{\beta + d + f}{3}$$

$$(n - m)\omega = \frac{1}{3}(\alpha + \cancel{\gamma} + \gamma\omega - \alpha\omega + \alpha - \beta - \cancel{\gamma} - \beta\omega + \gamma\omega - \gamma)\omega = \frac{1}{3}(\cancel{\alpha\omega} + \gamma\omega - \gamma - \cancel{\alpha\omega} + \alpha + \alpha\omega - \beta\omega - \beta\omega + \beta + \cancel{\gamma\omega} - \gamma - \cancel{\gamma\omega})$$

$$= \frac{1}{3}(\beta + \alpha + \alpha\omega - \beta\omega - \gamma - \beta\omega + \gamma\omega - \gamma)$$

$$p - m = \frac{1}{3}(\beta + \alpha + \alpha\omega - \beta\omega + \cancel{\beta} - \cancel{\beta} - \gamma - \beta\omega + \gamma\omega - \gamma)$$

$\therefore \dfrac{p-m}{n-m} = \omega$ であり $\angle PMN = \dfrac{\pi}{3}$ $\quad |PM| = |MN|$ $\quad \therefore$ △PMN は正三角形.

$\boxed{3}$

(1) $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ とする　$(x \geqq 1)$

$$\log f(x) = x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = x\log(1+x) - x\log x$$

両辺を微分　$\frac{f'(x)}{f(x)} = \log(1+x) - x \times \frac{1}{1+x} - \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log\frac{1+x}{x} - \frac{x}{1+x} + 1$

$$f'(x) = f(x)\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x+1}\right\} > 0$$

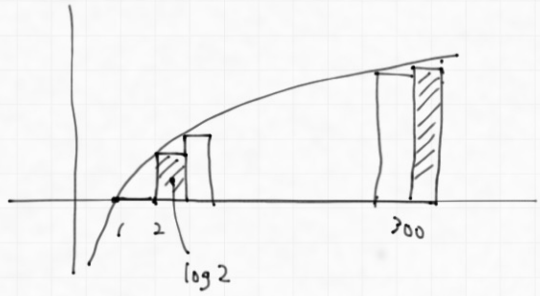
よって $f(x)$ は $x \geqq 1$ において単調に増加する

$f(1) = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$ なので　$f(x) \geqq 2$　$(x \geqq 1)$

また $\lim_{x \to \infty} f(x) = e < 3$ なので　$2 \leqq f(x) < 3$ が $x \geqq 1$ で成り立つ

$$\therefore\ 2 \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$

(2) $\log(300!) = \sum_{k=1}^{300} \log k < \int_1^{301} \log x\, dx$



$$= \left[x\log x - x\right]_1^{301} = 301\log 301 - 301 + 1$$

$$\log 100^{300} = 300\log 100$$

$$301\log 301 - 300 > 300\log 300 - 300 = 300(\log 3 + \log 100) - 300$$

$$= 300\log 100 + 300(\log 3 - 1) > 300\log 100$$

$\therefore\ \log(300!) > \log 100^{300}$　　$\therefore\ 300! > 100^{300}$

(3) (1) で $n = 2020$ とすると

$$2 \leqq \left(\frac{2021}{2020}\right)^{2020} < 3 \iff 2 \times 2020^{2020} \leqq 2021^{2020} < 3 \times 2020^{2020}$$

$$2020^{2020} > \frac{1}{3} \cdot 2021^{2020} = \frac{2021}{3} \times 2021^{2019} > 2021^{2019}$$

$$\therefore\ 2020^{2020} > 2021^{2019}$$