2020 東京海洋大　海洋生命・海洋資源環境

$\boxed{1}$　$f(x) = x^3 - 9x^2 + 3x + 45$

$$
\begin{array}{r}
x - 3 \\
x^2 - 6x + 1 \,\big)\, \overline{x^3 - 9x^2 + 3x + 45} \\
x^3 - 6x^2 + x \\
\hline
-3x^2 + 2x + 45 \\
-3x^2 + 18x - 3 \\
\hline
-16x + 48
\end{array}
$$

(1) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 3$

$\frac{1}{3}f'(x) = x^2 - 6x + 1$

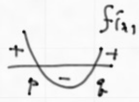
$f(x) = \frac{1}{3}f'(x)(x-3) - 16x + 48$

余りは $\mathbf{-16x + 48}$

(2) $f'(x) = 0$ を解くと　$x = 3 \pm 2\sqrt{2}$

$y = f(x)$ の増減は右のようになるので

x	$\cdots$	$3-2\sqrt{2}$	$\cdots$	$3+2\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$



$p = 3 - 2\sqrt{2}$, $q = 3 + 2\sqrt{2}$

$f'(p) = f'(q) = 0$ だから

$f(p) = \frac{1}{3}f'(p)(p-3) - 16p + 48 = -16p + 48 = -16(3-2\sqrt{2}) + 48 = 32\sqrt{2}$

同様に　$f(q) = -16q + 48 = -48 - 32\sqrt{2} + 48 = -32\sqrt{2}$

$\frac{p+q}{2} = 3$

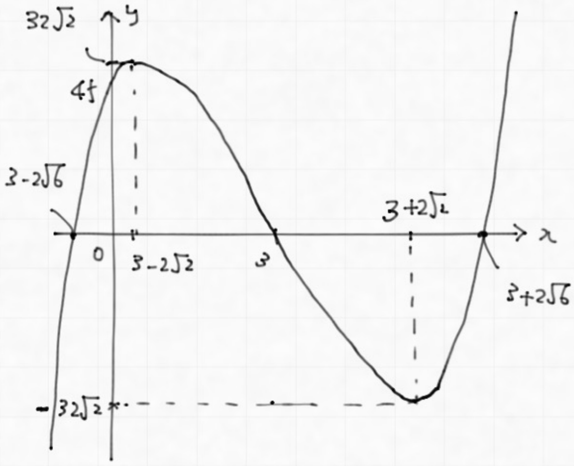
また　$f(3) = 3^3 - 9\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 45 = 0$

$\frac{f(p) + f(q)}{2} = 0$　だから　$(p, f(p))$ と $(q, f(q))$ の中点 $\left(\frac{p+q}{2}, \frac{f(p)+f(q)}{2}\right)$ は $y = f(x)$ 上に存在する

$f(x) = (x-3)(x^2 - 6x - 15)$

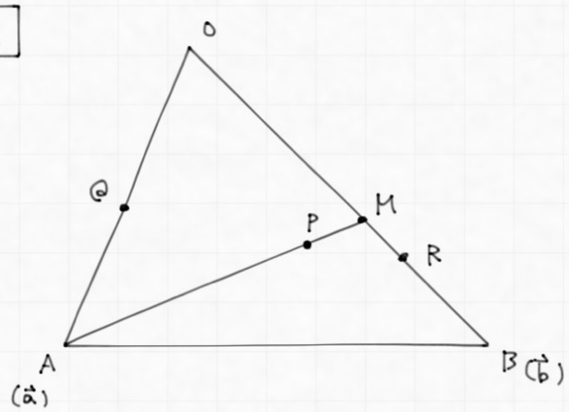
$f(x) = 0$ となるのは

$x = 3,\ 3 \pm 2\sqrt{6}$



2020 東京海洋大　海洋生命・海洋資源環境

$\boxed{2}$



(1) MはOBを4:3に内分するので　$\overrightarrow{OM} = \frac{4}{7}\vec{b}$

PはAMを7:2に内分するので

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{9}\overrightarrow{OA} + \frac{7}{9}\overrightarrow{OM} = \frac{2}{9}\vec{a} + \frac{7}{9}\cdot\frac{4}{7}\vec{b} = \mathbf{\frac{2}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b}}$$

(2) $\overrightarrow{OQ} = q\vec{a}$, $\overrightarrow{OR} = r\vec{b}$

$|\overrightarrow{QP}| : |\overrightarrow{PR}| = t : 1-t$　だから

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OQ} + t\overrightarrow{OP} = (1-t)q\vec{a} + tr\vec{b} \quad \cdots ①$$

①と(1)の2式について，$\vec{a}$, $\vec{b}$は互いに1次独立なので

$$(1-t)q = \frac{2}{9}, \quad tr = \frac{4}{9} \quad \cdots ②$$

が成り立つ．

②より　$q = \mathbf{\frac{2}{9(1-t)}}$，$r = \mathbf{\frac{4}{9t}}$

$0 \leqq q \leqq 1$，$0 \leqq r \leqq 1$ に上の関係を代入

$$0 \leqq \frac{2}{9(1-t)} \leqq 1, \quad 0 \leqq \frac{4}{9t} \leqq 1$$

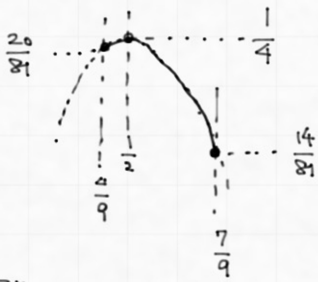
$$t \leqq \frac{7}{9}, \quad t \geqq \frac{4}{9} \qquad \therefore \quad \mathbf{\frac{4}{9} \leqq t \leqq \frac{7}{9}}$$

(3) $\triangle OAB$の面積をS_0と表す．

$$\triangle OQR = q \cdot r \cdot S_0 = \frac{2}{9(1-t)} \times \frac{4}{9t} S_0 = \frac{8}{81} \times \frac{1}{t(1-t)} S_0$$

ここで $t(1-t)$ について，これを $f(t)$ とおくと

$$f(t) = t(1-t) = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$



$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$，$f\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{20}{81}$，$f\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{14}{81}$

$f(t)$が最大となるとき $\triangle OQR$の面積は最小に，
$f(t)$が最小となるとき $\triangle OQR$の面積は最大になるので

$\triangle OQR$の面積は $t = \frac{1}{2}$ のとき最小．$t = \frac{7}{9}$ のとき最大となる

2020 東京海洋大　海洋生命・海洋資源環境

$\boxed{3}$

(1) 出る目の最大値が4以下となる確率 $P(M\leqq 4)$ は　$P(M\leqq 4)=\dfrac{4^4}{6^4}=\dfrac{2^4}{3^4}=\dfrac{16}{81}$

出る目の最大値が3以下となる確率 $P(M\leqq 3)$ は　$P(M\leqq 3)=\dfrac{3^4}{6^4}=\dfrac{1}{16}$

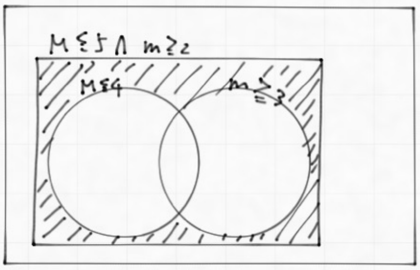
出る目の最大値が4となる確率 $P(M=4)$ は　$P(M=4)=P(M\leqq 4)-P(M\leqq 3)=\dfrac{16}{81}-\dfrac{1}{16}=\mathbf{\dfrac{175}{1296}}$

(2) $P(M\leqq 5$ かつ $m\geqq 2)=\dfrac{4^4}{6^4}=\dfrac{16}{81}$

$P(M\leqq 4$ かつ $m\geqq 2)=\dfrac{3^4}{6^4}=\dfrac{1}{16}$

$P(M\leqq 5$ かつ $m\geqq 3)=\dfrac{3^4}{6^4}=\dfrac{1}{16}$

$P(M\leqq 4$ かつ $m\geqq 3)=\dfrac{2^4}{6^4}=\dfrac{1}{81}$



$$\frac{16}{81}-\left(\frac{1}{16}\times 2-\frac{1}{81}\right)=\frac{256-81\times 2+16}{6^4}=\frac{110}{6^4}=\mathbf{\frac{55}{648}}$$

(3) (2)の $M=5,\ m=2$ のときで 3の目が出ないのは、さいころの目が、

$(2,2,2,5),(2,2,5,5),(2,5,5,5),(2,2,3,5),(2,3,5,5),(2,3,3,5)$

$\dfrac{4!}{3!}+\dfrac{4!}{2!2!}+\dfrac{4!}{3!}+\dfrac{4!}{2!}+\dfrac{4!}{2!}+\dfrac{4!}{2!}=4+6+4+12+12+12=50$

その確率は $\dfrac{50}{6^4}=\dfrac{50}{1296}=\dfrac{25}{648}$

したがって $M=5,\ m=2$ で、3の目が少なくとも1つ出るのは $\dfrac{55}{648}-\dfrac{25}{648}=\dfrac{30}{648}$

$M=4,\ m=1$ となる確率は (2)と同様に

$P(M\leqq 4$ かつ $m\geqq 1)-\left(P(M\leqq 3\right.$ かつ $m\geqq 1)+P(M\leqq 4$ かつ $m\geqq 2)-P(M\leqq 3$ かつ $\left.m\geqq 2)\right)=\dfrac{55}{648}$

そのうち3の目がでないのは

$(1,1,1,4),(1,1,4,4),(1,4,4,4),(1,1,2,4),(1,2,4,4),(1,2,2,4)$

$\dfrac{4!}{3!}+\dfrac{4!}{2!2!}+\dfrac{4!}{3!}+\dfrac{4!}{2!}+\dfrac{4!}{2!}+\dfrac{4!}{2!}=4+6+4+12+12+12=50$

したがって $M=4,\ m=1$ で 3の目が少なくとも1つ出るのは $\dfrac{55}{648}-\dfrac{50}{1296}=\dfrac{30}{648}$

$M=6,\ m=3$ となるのも同様で　$P(M=6,\ m=3)=\dfrac{55}{648}$

このとき、3の目は必ず出ている。

以上より、最大値と最小値の差が3となるのは　$\dfrac{55}{648}\times 3=\dfrac{165}{648}$

最大値と最小値の差が3で、少なくとも1回は3の目がでるのは　$\dfrac{30}{648}\times 2+\dfrac{55}{648}=\dfrac{115}{648}$

よって、題意の条件つき確率は　$\dfrac{115}{648}\div\dfrac{165}{648}=\dfrac{115}{165}=\mathbf{\dfrac{23}{33}}$

2020 東京海洋大　海洋生命・海洋資源環境

4

(1) (i) $n=0$ のとき　条件より　$0 \leqq a_0 \leqq 1$

(ii) $n=k$ のとき

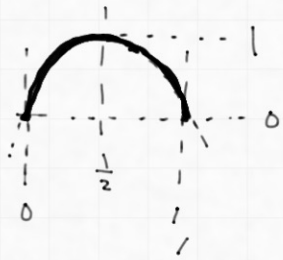
$0 \leqq a_k \leqq 1$ が成り立つと仮定する.

このとき

$$a_{k+1} = 4a_k(1-a_k) = -4\left(a_k - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

となるが、$-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1$ のグラフは $0 \leqq x \leqq 1$ で

右のようになることから　仮定 $0 \leqq a_k \leqq 1$ のもとで



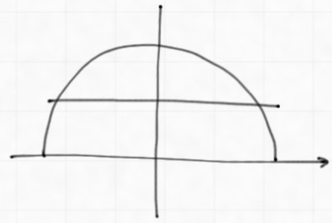
$0 \leqq f(a_k) = a_{k+1} \leqq 1$ であり　$n=k$ のとき $0 \leqq a_k \leqq 1$ が成り立てば　$0 \leqq a_{k+1} \leqq 1$ が成り立つことが分かる

(i)(ii) より 数学的帰納法により、全ての n について　$0 \leqq a_n \leqq 1$ が成立する.　証明終

(2) 漸化式より

$$\sin^2\theta_{n+1} = 4\sin^2\theta_n(1-\sin^2\theta_n)$$

$$= 4\sin^2\theta_n\cos^2\theta_n = (2\sin\theta_n\cos\theta_n)^2 = \sin^2 2\theta_n$$



$\sin\theta_{n+1} = \sin 2\theta_n$　　　$\theta_{n+1} = 2\theta_n,\ 180^\circ - 2\theta_n$

$$\begin{cases} 0^\circ \leqq \theta_n \leqq 45^\circ \text{ のとき} & \theta_{n+1} = 2\theta_n \\ 45^\circ < \theta_n \leqq 90^\circ \text{ のとき} & \theta_{n+1} = 180^\circ - 2\theta_n \end{cases}$$

(3) $a_0 = \sin^2 30^\circ$ のとき　$\theta_0 = 30^\circ$

$\theta_1 = 60^\circ,\ \theta_2 = 180^\circ - 60^\circ \times 2 = 60^\circ,\ \theta_3 = 60^\circ \cdots$

$a_0 = \sin^2 30^\circ = \frac{3}{4},\ a_1 = \sin^2 60^\circ = \frac{1}{4},\ a_2 = \frac{1}{4} \cdots$

$$a_n = \begin{cases} \frac{3}{4} & (n=0 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{4} & (n \geqq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = \sin^2 50^\circ$ のとき

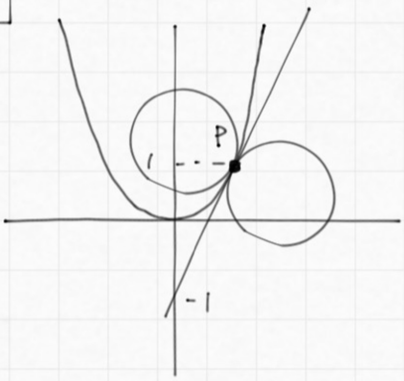
$\theta_0 = 50^\circ,\ \theta_1 = 180^\circ - 50^\circ \times 2 = 80^\circ$　$\theta_2 = 180^\circ - 80^\circ \times 2 = 20^\circ$　$\theta_3 = 20^\circ \times 2 = 40^\circ$

$\theta_4 = 40^\circ \times 2 = 80^\circ,\ \theta_5 = 20^\circ,\ \theta_6 = 40^\circ, \ldots$

$$a_n = \begin{cases} \sin^2 50^\circ & (n=0 \text{ のとき}) \\ \sin^2 80^\circ & (n=1, 4, 7, \cdots \text{ のとき}) \\ \sin^2 20^\circ & (n=2, 5, 8, \cdots \text{ のとき}) \\ \sin^2 40^\circ & (n=3, 6, 9, \cdots \text{ のとき}) \end{cases}$$

2020 東京海洋大　海洋生命・海洋資源環境

$\boxed{5}$



(1)　$y=x^2$ より $y'=2x$ だから

(1, 1)における接線は　$y=2\cdot1(x-1)+1)=2x-1$

lの法線ベクトルの1つは $(2,-1)$

円C_2の中心とPを結ぶベクトルは lの法線ベクトルと平行でかつ、大きさrのベクトルとなっている。

C_2の中心をMとすると

$$\overrightarrow{PM}=\pm\frac{r}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\pm\frac{r}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\pm\frac{r}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

C_2の半径はrなのでC_2の方程式は

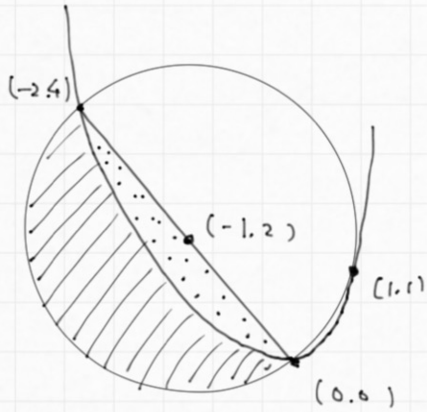
$$\begin{cases}\left(x-1-\frac{2r}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(y-1+\frac{r}{\sqrt{5}}\right)^2=r^2\\ \left(x-1+\frac{2r}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(y-1-\frac{r}{\sqrt{5}}\right)^2=r^2\end{cases}$$

(2)　C_2は $(x+1)^2+(y-2)^2=5$

これと$y=x^2$を連立　$(x+1)^2+(x^2-2)^2=5 \iff x^4-3x^2+2x=0$

$\iff x(x-1)^2(x+2)=0 \iff x=1, 0, -2$

共有点は **(1, 1), (0, 0), (−2, 4)**



(3)　(−2, 4)と(0, 0)の中点は(−1, 2)

だから、(−2, 4)と(0, 0)を結ぶ直線は

C_2の直径

右図打点部の面積は　$\frac{1}{6}(0+2)^3=\frac{4}{3}$

C_2の面積は $\pi\sqrt{5}^2=5\pi$

斜線部の面積は　$5\pi\times\frac{1}{2}-\frac{4}{3}=\boldsymbol{\frac{5}{2}\pi-\frac{4}{3}}$