2020信州大

①

(1) $a<b<c$ だから $c \geqq 3$

$c=3$ のとき $(a,b)=(1,2)$

$c=4$ のとき $(a,b)=(1,3)$

$c=5$ のとき $(a,b)=(1,4),(2,3)$

$c=6$ のとき $(a,b)=(1,5),(2,4)$

$c=7$ のとき $(a,b)=(1,6),(2,5),(3,4)$

$c=8$ のとき $(a,b)=(1,7),(2,6),(3,5)$ 12通り.

(2) $c=k$ のとき (a,b) の組み合わせの個数を N_k と表す

k が偶数のとき. ($k=2l$ として)

$(a,b)=(1,2l-1),(2,2l-2),\cdots(l-1,l+1)$ の $l-1$ 通り. $N_{2l}=l-1$

$N_k=\frac{k}{2}-1$

k が奇数のとき ($k=2l-1$ として)

$(a,b)=(1,2l-2),(2,2l-3),\cdots(l-1,l)$ の $l-1$ 通り $N_{2l-1}=l-1$

$N_k=\frac{k+1}{2}-1=\frac{k-1}{2}$

(i) n が偶数のとき ($n=2m$ とする) $\left(m=\frac{n}{2}\right)$

$$\sum_{k=1}^{n} N_k=\sum_{k=1}^{2m} N_k=\sum_{k=1}^{m} N_{2k}+\sum_{k=1}^{m} N_{2k-1}=\sum_{k=1}^{m}(k-1)+\sum_{k=1}^{m}(k-1)=2\sum_{k=1}^{m}(k-1)=2\times\frac{0+m-1}{2}\times m$$

$$=m(m-1)=\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)=\frac{1}{4}n(n-2)$$

(ii) n が奇数のとき ($n=2m-1$ とする) $\left(m=\frac{n+1}{2}\right)$

$$\sum_{k=1}^{n} N_k=\sum_{k=1}^{2m-1} N_k=\sum_{k=1}^{m-1} N_{2k}+\sum_{k=1}^{m} N_{2k-1}=\sum_{k=1}^{m-1}(k-1)+\sum_{k=1}^{m}(k-1)=\frac{1}{2}(m-2)\times(m-1)+\frac{1}{2}(m-1)m$$

$$=\frac{1}{2}(m-1)(2m-2)=(m-1)^2=\left(\frac{n+1}{2}-1\right)^2=\frac{1}{4}(n-1)^2$$

$$\begin{cases}\frac{1}{4}n(n-2) & (n\text{が偶数のとき})\\[2ex] \frac{1}{4}(n-1)^2 & (n\text{が奇数のとき})\end{cases}$$

2020信州大

②

(1) $\int_0^1 f(t)\,dt = a$ とおくと　$f(x) = x^2 - \frac{3}{5}ax + 4$　と表せるので

$$a = \int_0^1 t^2 - \frac{3}{5}at + 4\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{10}at^2 + 4t\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{3}{10}a + 4 \qquad \therefore\ a = \frac{10}{3}$$

よって

$f(x) = x^2 - 2x + 4$

これと $y = mx$ が接するので連立して　$x^2 - 2x + 4 - mx = 0$ …①

①の判別式をDとして　$D = (2+m)^2 - 4\cdot 4 = 0$　　$m = 2, -6$

$m = 2$ のとき　①は　$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0$　　$\therefore x = 2$ のとき接する

$m = -6$ 〃　①は　$x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0$　　$x = -2$ のとき接するが、条件より $x > 0$ で

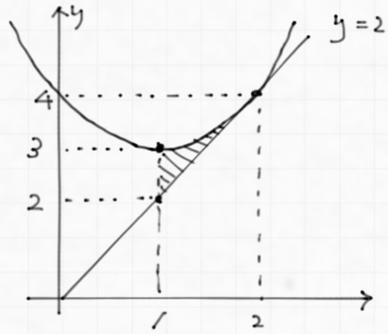
接するとあるので　これは不適

$\therefore$ **$m = 2$**.　接点は $(2, f(2))$ すなわち **$(2, 4)$**

(2)　もとめる面積は右グラフの斜線部

面積をSとして

$$S = \int_1^2 f(x) - 2x\,dx = \int_1^2 (x-2)^2\,dx = \left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_1^2 = \mathbf{\frac{1}{3}}$$



③

(1) $t \geqq 0$ のとき $1+t^a \geqq 1 > 0$ なので不等式の両辺を $1+t^a$ で割ると

$$\frac{(1+t)^a}{1+t^a} \leqq K$$

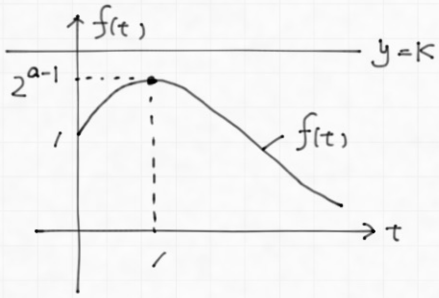
ここで上式の左辺を $f(t)$ とおく．

$$f'(t) = \frac{a(1+t)^{a-1}(1+t^a) - at^{a-1}(1+t)^a}{(1+t^a)^2} = \frac{a(1+t)^{a-1}(1-t^{a-1})}{(1+t^a)^2}$$

$f'(t)=0$ となるのは $t \geqq 0$ の範囲では $t=1$ だけで，$f(t)$ の増減は．

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	$+$	0	$-$
$f(t)$	1	$\nearrow$	2^{a-1}	$\searrow$

$$f(0) = \frac{(1+0)^a}{1+0} = 1 \ , \quad f(1) = \frac{2^a}{1+1} = 2^{a-1}$$



$y=f(t)$ のグラフの $t \geqq 0$ の範囲が常に

$y=K$ のグラフの下にあればよいので

$$K \geqq 2^{a-1}$$

K の最小値は $\mathbf{2^{a-1}}$

(2) (1) で $t = \sqrt[5]{1+\sin x}$，$a=10$ とする $(K \geqq 2^{10-1} = 2^9)$

$$\left(1+\sqrt[5]{1+\sin x}\right)^{10} \leqq 2^9\left\{1+(1+\sin x)^2\right\} \quad \cdots ①$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき $0 \leqq \sin x \leqq 1$ だから $1 \leqq \sqrt[5]{1+\sin x} \leqq \sqrt[5]{2}$

なので ① は常に成り立っている

① を $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で積分すると

$$\int_0^\pi \left(1+\sqrt[5]{1+\sin x}\right)^{10} dx \leqq \int_0^\pi 2^9 (2+2\sin x+\sin^2 x)\,dx$$

$$= 512 \int_0^\pi 2+2\sin x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x \, dx = 512\left[\frac{5}{2}x - 2\cos x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi$$

$$= 512\left\{\frac{5}{2}\pi + 2 - 0 - (0-2-0)\right\} = 2048 + 1280\pi < 2048 + 1280 \times 3.15 = 6080$$

証明終

④

(1) $n=2m$ のとき

$$2^{2m}-1=(2^2)^m-1=4^m-1\equiv 1^m-1\equiv 0$$ (mod 3) 以下合同式は全て3を法とする

$n=2m-1$ のとき

$$2^{2m-1}-1=2\cdot 2^{2m-2}-1=2\cdot 4^{m-1}-1\equiv 2\cdot 1^{m-1}-1\equiv 1\not\equiv 0$$

よって 2^n-1 が3で割り切れるのは n が偶数のときだけで

nは全ての正の偶数

(2) (i) $n=6m-5$ のとき $(m\geqq 1)$

$$(6m-5)^{6m-5}-1\equiv 1^{6m-5}-1\equiv 0 \qquad (\because\ 6m-5\equiv -5\equiv 1)$$

(ii) $n=6m-4$ のとき

$$(6m-4)^{6m-4}-1\equiv 2^{6m-4}-1\equiv 2^{6m-6}\cdot 2^2-1$$

$$\equiv 2^{2(3m-1)}\cdot 1-1\equiv 1^{3m-1}\cdot 1-1\equiv 0$$

(iii) $n=6m-3$ のとき

$$(6m-3)^{6m-3}-1\equiv 0-1\equiv 2\not\equiv 0$$

(iv) $n=6m-2$ のとき

$$(6m-2)^{6m-2}-1\equiv 1^{6m-2}-1\equiv 0 \qquad (\because\ 6m-2\equiv 1)$$

(v) $n=6m-1$ のとき

$$(6m-1)^{6m-1}-1\equiv 2^{6m-1}-1\equiv 2^{6m-6}\cdot 2^5-1$$

$$\equiv 4^{3m-3}\cdot 32-1\equiv 1^{3m-3}\cdot 2-1\equiv 1\not\equiv 0$$

(vi) $n=6m$ のとき

$$(6m)^{6m}-1\equiv 0-1\equiv 2\not\equiv 0$$

$n=6m-5,\ 6m-4,\ 6m-2\ (m\geqq 1)$ のとき n^n-1 は3で割り切れる

⑤

(1) $\cos(n+2)\theta + \cos n\theta = 2\cos\frac{(n+2)\theta + n\theta}{2} \times \cos\frac{(n+2)\theta - n\theta}{2} = 2\cos(n+1)\theta\cos\theta$

よって $\cos(n+2)\theta - 2\cos\theta\cos(n+1)\theta + \cos n\theta = 0$ が成り立っている.

(2) $\cos 3\theta = \cos(1+2)\theta = 2\cos\theta\cos 2\theta - \cos\theta = 2\cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - \cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$= 4x^3 - 3x$

$\cos 4\theta = \cos(2+2)\theta = 2\cos\theta\cos 3\theta - \cos 2\theta$

$= 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$\cos 5\theta = \cos(3+2)\theta = 2\cos\theta\cos 4\theta - \cos 3\theta = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - 4x^3 + 3x$

$= 16x^5 - 20x^3 + 5x$

(3) $\theta = \frac{\pi}{10}$ とする　$x = \cos\frac{\pi}{10}$

$\cos 5 \cdot \frac{\pi}{10} = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

$16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$

$x \neq 0$ なので両辺を x で割って $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$

$x^2 = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 80}}{16} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$

ここで $\cos^2\frac{\pi}{10} > \cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} > \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ だから.　$\cos^2\frac{\pi}{10} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$