

/ (1) 凹凸の自然対数をとる

$$\log f(x) = \frac{1}{x+1} \log(x+1)$$

凹凸を微分

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} \times \log(x+1) + \frac{1}{(x+1)^2} \\ f'(x) &= \frac{1 - \log(x+1)}{(x+1)^2} \times (x+1)^{\frac{1}{x+1}} = \{1 - \log(x+1)\} (x+1)^{\frac{1}{x+1}-2}\end{aligned}$$

 $x \geq 0$ で $f'(x) = 0$ となるのは $1 - \log(x+1) = 0$ すなはち $x = e-1$ のときのみ $f'(x)$ の増減は下のようになる

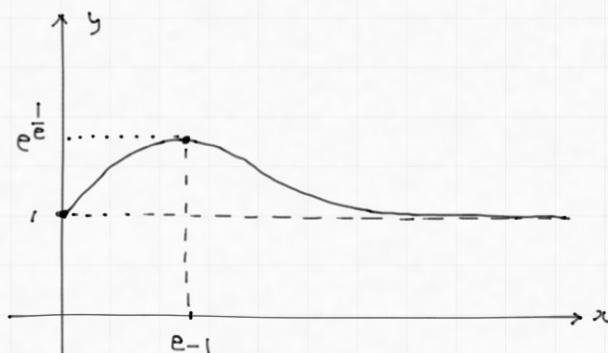
x	0	...	$e-1$...
f'	+	+	0	-
f	↗		↗	↘

$$f(e-1) = (e-1+1)^{\frac{1}{e}} = e^{\frac{1}{e}}$$
よって $f(x)$ は $x = e-1$ のとき最大で、最大値は $e^{\frac{1}{e}}$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \{\log f(x)\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x+1)}{x+1} = 0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1 - \log(x+1)}{(x+1)^2} \times f(x) \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{\log(x+1)}{x+1}}{(x+1)^2} \times f(x) \right\} = 0 \times 1 = 0$$

$$(3) f(0) = 1^1 = 1. \quad y = f(x) \text{ のグラフは下のようになります}$$



2. 以下の偏角θは $-\pi \leq \theta \leq \pi$ の範囲で考えることとする。

$$(1) Z_2 の偏角は \frac{\pi}{3}x_1 + \frac{\pi}{3}x_2 = \frac{\pi}{3}(x_1 + x_2) \dots \text{①}$$

x_1, x_2 は 1 または -1 または 0 だから、①の範囲は 0 または $\pm \frac{\pi}{3}$ または $\pm \frac{2}{3}\pi$ となり。

$$(x_1, x_2) = (0, 1), (0, -1), (1, 0), (1, 1), (-1, 0), (-1, -1)$$

$$\text{よって、もとめる確率は } \frac{4}{6} \times \frac{1}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times 2 = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

(2) $Z_1 \sim Z_n$ が実数でない確率を q_n とする

$$Z_1 \text{ が実数でないのは } x_1 = \pm 1 \text{ のときから } q_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$n \geq 2$ のとき、 Z_n が実数でないとき Z_n の偏角は

$$\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, -\frac{\pi}{3}, -\frac{2}{3}\pi$$

の4つのうちのいずれか。このとき $n+1$ 回目の X_{n+1} について

$$\arg Z_n = \frac{\pi}{3} \text{ のとき, } X_{n+1} = 0 \text{ または } 1 \quad \arg Z_n = \frac{2}{3}\pi \text{ のとき, } X_{n+1} = 0 \text{ または } -1$$

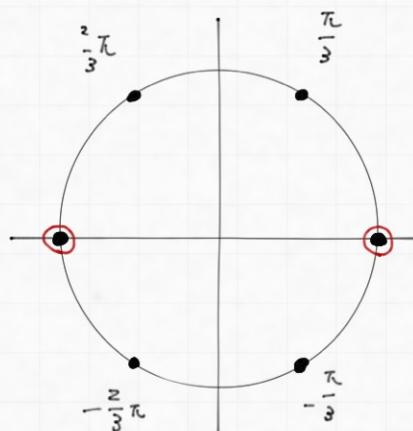
$$\arg Z_n = -\frac{\pi}{3} \text{ のとき, } X_{n+1} = 0 \text{ または } -1 \quad \arg Z_n = -\frac{2}{3}\pi \text{ のとき, } X_{n+1} = 0 \text{ または } 1$$

となるだけではないわけ

$$q_{n+1} = \frac{5}{6} q_n$$

したがって $\{q_n\}$ は初項 q_1 、公比 $\frac{5}{6}$ の等比数列で、この一般項は $q_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

(3)



Z_n が実数となるのは $Z_n = \pm 1$ のとき、

Z_n が実数でないとき、 Z_{n+1} が実数となるのは、

$$\arg Z_n = 0 \text{ のときで, } X_{n+1} = 0 \text{ であり}.$$

$$\text{その確率は } \frac{4}{6}$$

Z_n が実数でないとき、 $\arg Z_n = \pm \frac{\pi}{3}, \pm \frac{2}{3}\pi$ のいずれかで、いずれの場合でも、 Z_{n+1} が実数となるためには X_{n+1} は 1 または 2 のいずれか -1 であることが必要で、その確率は $\frac{1}{6}$

以上より

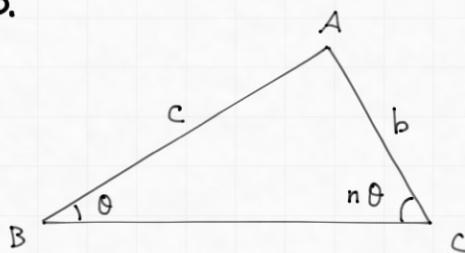
$$P_{n+1} = P_n \times \frac{4}{6} + (1-P_n) \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{6}$$

$$P_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}(P_n - \frac{1}{3}), P_1 = \frac{4}{6} \text{ より}.$$

$$P_n - \frac{1}{3} = \left(\frac{4}{6} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad P_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 \right\} = \frac{1}{3}$$

3.



$\angle ABC = \theta$ とおくと、条件より $\angle ACB = n\theta$

$$\theta + n\theta + \angle A = \pi \text{ より} \quad (1+n)\theta < \pi$$

$$\therefore \theta < \frac{\pi}{n+1} \dots (*)$$

$$n \geq 2 \text{ 以上の 自然数} \Rightarrow \theta < \frac{\pi}{2+1} = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{正弦定理より} \quad \frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin n\theta} \Leftrightarrow c = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} b$$

だから $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ のとき $n \geq 2$ にあり

$$\frac{\sin n\theta}{\sin \theta} < n \text{ を示せばよい} \dots \textcircled{1}$$

①は $n \sin \theta - \sin n\theta > 0$ と変形できることで。

$$f(\theta) = n \sin \theta - \sin n\theta \text{ とおう}$$

$$f'(\theta) = n \cos \theta - n \cos n\theta$$

$$= n (\cos \theta - \cos n\theta)$$

$$= -2n \sin \frac{n\theta + \theta}{2} \sin \frac{\theta - n\theta}{2}$$

$$= 2n \sin \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{n-1}{2}\theta$$

(*)より

$$\theta < \frac{\pi}{n+1} \text{ だから} \quad 0 < \frac{n+1}{2}\theta < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \frac{n-1}{2}\theta < \frac{\pi}{2}$$

よって $f'(\theta)$ は常に正である。 $f(\theta)$ は単調に増加する。

$$f(0) = n \times 0 - 0 = 0 \text{ なので}$$

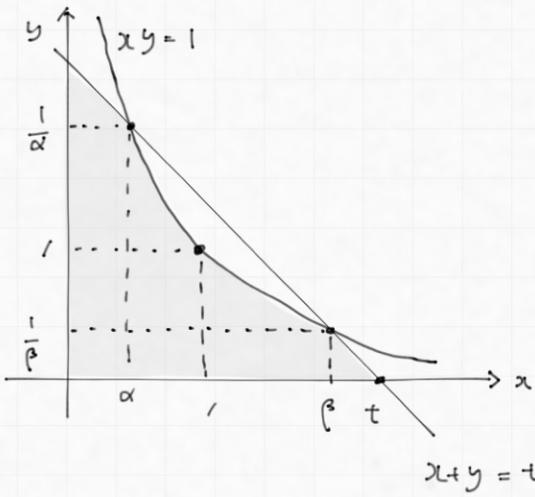
$$f(\theta) > f(0) = 0$$

以上より $n \sin \theta - \sin n\theta > 0$ が成り立つので

①は成り立つ。したがって $c < nb$ が成り立つ。

tが+分に大きいとす。

3



$$x+y=t \quad \text{と} \quad xy=1 \quad \text{の} \quad \begin{array}{l} \text{解} \\ \text{を} \end{array}$$

$$\alpha(t-\alpha)=1$$

$$\alpha^2 - t\alpha + 1 = 0 \quad \alpha = \frac{t \pm \sqrt{t^2-4}}{2}$$

ここで α, β とおく ($\alpha < \beta$ とする)

解と係数の関係より $\alpha+\beta=t, \alpha\beta=1 \dots \textcircled{1}$

$x+y=t$ と $xy=1$ で囲まれた四角形の面積を $T(t)$ とすよ

$$T(t) = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \times \frac{1}{2} \times (\beta - \alpha)$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx$$

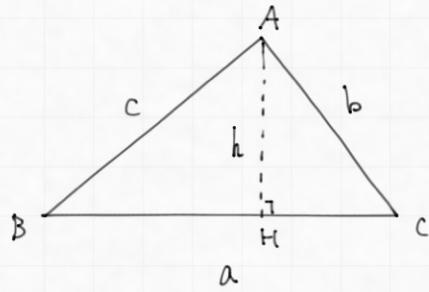
$$= \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} = \log \beta + \log \alpha$$

$$S(t) = \frac{1}{2}t^2 - T(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{t(\alpha-\beta)}{2} + \log \frac{\beta}{\alpha} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\begin{aligned} S(t) - 2\log t &= \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t\sqrt{t^2-4} + \log \frac{t+\sqrt{t^2-4}}{t-\sqrt{t^2-4}} - 2\log t \\ &= \frac{t(t-\sqrt{t^2-4})(t+\sqrt{t^2-4})}{2(t+\sqrt{t^2-4})} + \log \left\{ \frac{(t+\sqrt{t^2-4})^2}{t^2-t^2+4} \times \frac{1}{t^2} \right\} \\ &= \frac{4}{2(1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}})} + \log \left(1 + \sqrt{1-\frac{4}{t^2}} \right)^2 - \log 4 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{4}{2 \times 2} + \log 4 - \log 4 = 1$$

5.



$$AB = c \text{ と } \angle B < \frac{\pi}{2}, \angle C < \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } a + b + c = 2$$

$$\angle B < \frac{\pi}{2}, \angle C < \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } a + b + c = 2$$

A から BC に下した垂線の足を H . $AH = h$ とす

回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi h^2 \times BH \times \frac{1}{3} + \pi h^2 \times CH \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \pi h^2 (BH + CH) = \frac{1}{3} \pi h^2 a \end{aligned}$$

$$\angle B \geq \frac{\pi}{2} \text{ のとき}$$

H を 直線 BC 上にとる

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 BH - \frac{1}{3} \pi h^2 CH = \frac{1}{3} \pi h^2 (BH - CH) = \frac{1}{3} \pi h^2 a$$

$$\angle C \geq \frac{\pi}{2} \text{ のときも 上と 同様で } V = \frac{1}{3} \pi h^2 a.$$

$$\text{以上より } V = \frac{1}{3} \pi h^2 a$$

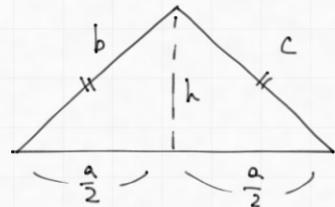
ここで a が一定であるとき $b + c = 2 + a$ となる $b + c$ も一定。

A は B, C からの距離の和が一定であるので、 B, C を 距離とした

直線上に位置する。したがって h が最大となるのは h が

直角の短軸半径と一致するとき。このとき $AB = AC$ となる。

$\triangle ABC$ が BC を底辺とする等辺三角形のとき 体積は最大となる。

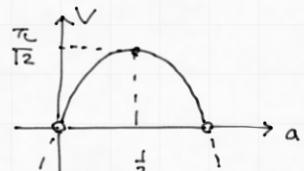


$$(z) \quad b = c \text{ のとき } h^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} \quad \text{また } a + b + c = 2 \text{ より } 2b = 2 - a \quad b = 1 - \frac{1}{2}a.$$

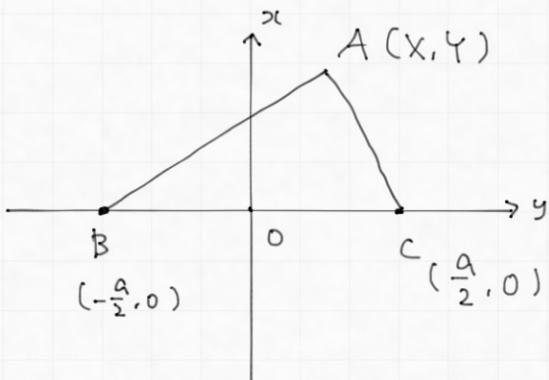
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi h^2 a = \frac{1}{3} \pi \left(b^2 - \frac{a^2}{4} \right) a = \frac{1}{3} \pi \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}a \right)^2 - \frac{a^2}{4} \right\} a = \frac{1}{3} \pi a \left(1 - a \right) \\ &= \frac{1}{3} \pi \left(-a^2 + a \right) = -\frac{1}{3} \pi \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} \pi \end{aligned}$$

$$a + b + c = 2, \quad a < b + c \text{ より } a < 1$$

$$0 < a < 1 \text{ の範囲にあける } V \text{ の最大値は } a = \frac{1}{2} \text{ のとき } z \quad V = \frac{\pi}{12}$$



5(1) 「△ABCとその外接円をもとめよ」



A, B, C を左図のように定めよ。

$$AB + AC + BC = 2 \text{ より}$$

$$\sqrt{(x + \frac{a}{2})^2 + y^2} + \sqrt{(x - \frac{a}{2})^2 + y^2} + a = 2$$

$$\sqrt{(x + \frac{a}{2})^2 + y^2} = 2 - a - \sqrt{(x - \frac{a}{2})^2 + y^2}$$

両辺2乗

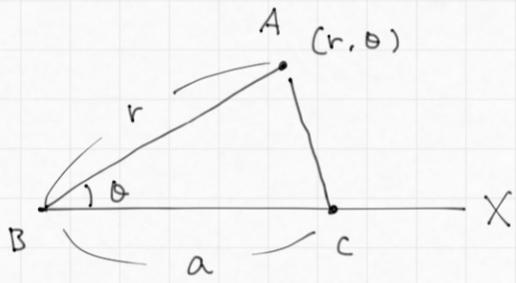
$$(x + \frac{a}{2})^2 + y^2 = (2 - a)^2 + (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 - 2(2 - a)\sqrt{(x - \frac{a}{2})^2 + y^2}$$

$$2ax - (2 - a)^2 = -2(2 - a)\sqrt{(x - \frac{a}{2})^2 + y^2}$$

両辺2乗

$$4a^2x^2 + (4 - 4a + a^2)^2 - 4ax(2 - a) = 4(2 - a)^2 \left\{ (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 \right\}$$

$$(4 - 4a + a^2)^2 - 8ax + 16a^2x = 4(2 - a)^2 \left\{ (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 \right\}$$



$$AC = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}$$

$$r + a + \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta} = 2$$

$$\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta} = 2 - r - a$$

$$a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta = 4 + r^2 + a^2 - 4r - 4a + 2ra$$

$$r(2 - a - a \cos \theta) = 2 - 2a$$

$$r = \frac{2 - 2a}{2 - a - a \cos \theta}$$

$$r \sin \theta = \frac{(2 - 2a) \sin \theta}{2 - a - a \cos \theta} = f(\theta)$$

$$f'(\theta) = \frac{(2 - 2a) \cos \theta (2 - a - a \cos \theta) - (2 - 2a) \sin \theta \times a \sin \theta}{(2 - a - a \cos \theta)^2}$$

$$= \frac{2(1-a)(2-a) \cos \theta - 2(1-a)a \cos^2 \theta - 2(1-a)a \sin^2 \theta}{(2 - a - a \cos \theta)^2}$$

$$= \frac{2(1-a) \left\{ (2-a) \cos \theta - a \right\}}{(2 - a - a \cos \theta)^2}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{2-a} \quad a < \frac{a}{2-a}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{a}{2-a} \right)^2 = \frac{4 - 4a + a^2 - a^2}{(2-a)^2} = \frac{4(1-a)}{(2-a)^2}$$

$$\sin \theta = \frac{(2-2a) \frac{2\sqrt{1-a}}{2-a}}{(2-a) - a - \frac{a}{2-a}} = \frac{2(2-2a)\sqrt{1-a}}{4-4a} = \sqrt{1-a}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi (1-a) \cdot a$$