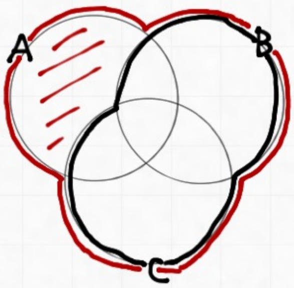
2021 藤田医科（未来入試）

1 (1) $x^4+y^4=0$ を満たすのは $x=y=0$ のみ

$x=y=0$ は $x+y=0$ を満たす（十分条件）　　(ア)

$x=1,\ y=-1$ は $x+y=0$ を満たすが $x^4+y^4=0$ は満たさない（必要性はない）　　③



$A\cup B\cup C$ は左図赤枠

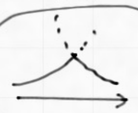
$B\cup C$ は黒枠

両者が一致するとき左図の斜線部は空集合

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ これが A と等しいのも、上図の斜線部が空集合であるということ。

同じ条件なので $A\cup B\cup C=B\cup C$ は $A\cap(B\cup C)=A$ であるための必要十分条件

①



こんなグラフが反例

$f(x)$ が $x=1$ で連続 $\underset{○}{\overset{×}{\rightleftarrows}}$ $f(x)$ が $x=1$ で微分可能　　②

$$a^6-a^4b^2-a^4c^2-a^2b^4+2a^2b^2c^2-a^2c^4+b^6-b^4c^2-b^2c^4+c^6=0$$

$$a^6-(b^2+c^2)a^4-(b^4-2b^2c^2+c^4)a^2+b^6-b^4c^2-b^2c^4+c^6=0$$

$$a^4(a^2-b^2-c^2)-(b^2-c^2)^2a^2+b^4(b^2-c^2)-c^4(b^2-c^2)=0$$

$$a^4(a^2-b^2-c^2)-(b^2-c^2)^2a^2+(b^2-c^2)^2(b^2+c^2)=0$$

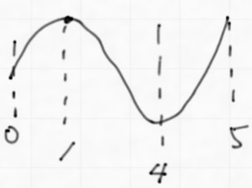
$$a^4(a^2-b^2-c^2)-(b^2-c^2)^2(a^2-b^2-c^2)=0$$

$$(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2-b^2-c^2)=0$$

①

(2) $f(x)=4x^3-30x^2+48x-13$

$f'(x)=12x^2-60x+48=12(x^2-5x+4)=12(x-1)(x-4)$



$f(0)=-13$, $f(4)=256-480+192-13=-45$

$f(1)=4-30+48-13=9$　　$f(5)=500-750+240-13=-23$

最大値 − 最小値 $=9-(-45)=54$

(3)

$\overset{(4人)}{{}_3C_1 \times {}_6C_3} \times \overset{(3人)}{{}_2C_1 \times {}_3C_2} \times \overset{(2人)}{{}_1C_1 \times {}_1C_1} = 3\times 20\times 2\times 3 = 360$

全ての分け方は ${}_9C_4 \times {}_5C_3 \times {}_2C_2 = \dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2} \times \dfrac{5\cdot 4}{2} = 1260$ $\qquad \dfrac{360}{1260} = \dfrac{2}{7}$

(4) $63 = 21\times 3$, $294 = 21\times 14$, $a = 21\times a'$

$9702 = 462\times 21 = 2\times 3\times 7\times 11\times 21$

63と294の最小公倍数は $2\times 3\times 7\times 21$ だから $a'=11$ のとき a は最小 $a = 21\times 11 = 231$

(5) $40\times 5 + 60\times 10 + 100\times 10 = 1800$ $\qquad 1800 \div 25 = 72$ … 平均

$40^2\times 5 + 60^2\times 10 + 100^2\times 10 = 8000 + 36000 + 100000 = 144000$ $\qquad 144000 \div 25 = 5760$

$5760 - 72^2 = 576$ … 分散 $\qquad \sqrt{576} = 24$ … 標準偏差

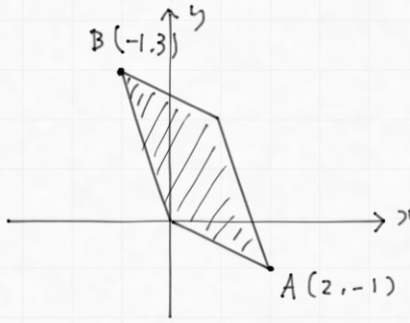
(6)

$$\begin{array}{rcl} a_{n+1} &=& -a_n + n \\ a_n &=& -a_{n-1} + n - 1 \quad (- \\ \hline a_{n+1} &=& a_{n-1} + 1 \end{array}$$

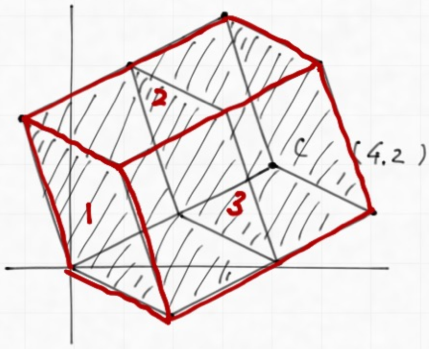
$a_{51} = a_{49} + 1 = a_{47} + 1 + 1 = \cdots = a_1 + 25 = 125$

$a_{51} = -a_{50} + 50 \qquad a_{50} = 50 - a_{51} = -75$

(7)



$p\vec{OA} + q\vec{OB}$ の表す領域



$r\vec{OC}$ を加える(平行移動)

3つの平行四辺形の面積の和として求める

$$\underset{1}{\left|2\times 3 - 1\right|} + \underset{2}{\left|2\cdot 2 + 1\cdot 4\right|} + \underset{3}{\left|-1\times 2 - 3\times 4\right|} = 5 + 8 + 14 = 27$$

(8) $(5\sqrt{3} + 5i)\alpha + \beta - (5\sqrt{3} + 5i)\beta = \gamma$

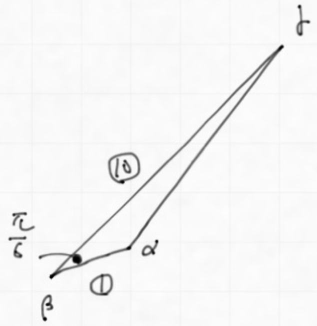
$(5\sqrt{3} + 5i)(\alpha - \beta) = \gamma - \beta$

$5\sqrt{3} + 5i = \dfrac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta} = 10\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = 10\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$|\gamma - \beta| : |\alpha - \beta| = 10 : 1$, $\angle \gamma\beta\alpha = \dfrac{\pi}{6}$

$|\alpha - \beta| = 4$ だから $|\gamma - \beta| = 40$

$\triangle ABC = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 40 \times \sin\dfrac{\pi}{6} = 40$



(9) $\displaystyle\int_{-3}^{3} x^2 + x\cos^3 x\,dx = 2\int_0^3 x^2\,dx = 2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 18$

$\because$ $x\cos^3 x$ は 奇関数

2021 藤田医科（未来）

(i) n が奇数のとき

$n=2k-1$ （$k=1,2,3\cdots$）と表すことができる.

このとき. 平均が n^{m-1} となる n 個の連続した奇数として

$$n^{m-1}-2(k-1),\ n^{m-1}-2(k-2),\ \cdots\ ,n^{m-1},\ n^{m-1}+2,\ n^{m-1}+4,\ \cdots\ n^{m-1}+2(k-1)$$

の総和は

$$\frac{1}{2}\left\{n^{m-1}-2(k-1)+n^{m-1}+2(k-1)\right\}\times(2k-1)=n^{m-1}\times n=n^m$$

となるので題意は成り立つ.

(ii) n が偶数のとき

$n=2k$ と表せる （$k=1,2,3\cdots$）

$$n^{m-1}-2k+1,\ n^{m-1}-2k+3,\ \cdots\ n^{m-1}-1,\ n^{m-1}+1,\ n^{m-1}+3,\ \cdots\ n^{m-1}+2k-1$$

の n 個の連続した奇数の総和は

$$\frac{1}{2}\left(n^{m-1}-2k+1+n^{m-1}+2k-1\right)\times 2k=n^{m-1}\times n=n^m$$

となるので題意は成り立つ.

(i)(ii) より n^m は連続する n 個の奇数の和で表すことができる　　証明終

2021 藤田医科（未来）

3

(1) C と l を連立して. $2x^2-x^3=mx \iff x(x^2-2x+m)=0$ …①

$x^2-2x+m=0$ が $x=0$ を解に持つのは $m=0$ のとき.で. このとき $x^2-2x=0 \iff x=0,2$

だから. ① は 0 と 2 を解に持ち. C と l の交点は 2つ.

$m\neq 0$ のとき.

$x^2-2x+m=0$ が 2つの解を持つとき.

判別式を D として $D/4=1-m>0 \iff m<1$ $(m\neq 0)$

このとき ① は 3つの解をもつ

$x^2-2x+m=0$ が 1つの解を持つとき.（重解）

$D/4=1-m=0 \iff m=1$ このとき ① は 2つの解をもつ

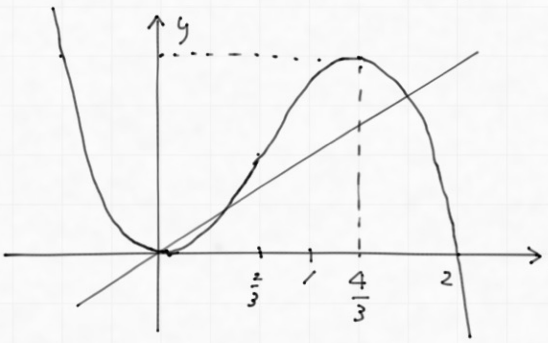
$x^2-2x+m=0$ が解を持たないとき.

$D/4=1-m<0 \iff m>1$ このとき ① は 1つの解をもつ

以上より

$m>1$ のとき 共有点は 1つ
$m=0, 1$ のとき 共有点は 2つ
$m<0$, $0<m<1$ のとき 共有点は 3つ

(2) $y=2x^2-x^3=x^2(2-x)=f(x)$ とおく.



(1) より 共有点が 2つ以上となるのは $m\leqq 1$ のとき.

・$0\leqq m\leqq 1$ のとき

$x^2-2x+m=0$ の 2解を α, β とすると（$\alpha\leqq\beta$ とする）

$$S=\int_0^\alpha mx-2x^2+x^3\,dx+\int_\alpha^\beta 2x^2-x^3-mx\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}mx^2\right]_0^\alpha+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}mx^2\right]_\beta^\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\alpha^4-\frac{4}{3}\alpha^3+m\alpha^2-\frac{1}{4}\beta^4+\frac{2}{3}\beta^3-\frac{1}{2}m\beta^2$$

$$=(\alpha^2-2\alpha+m)\left(\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{2}m-\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{3}(m-1)\alpha-\frac{1}{2}m^2+\frac{2}{3}m$$

$$-(\beta^2-2\beta+m)\left(\frac{1}{4}\beta^2-\frac{1}{6}\beta+\frac{1}{4}m-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}(m-1)\beta+\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{3}m$$

$$=\frac{4}{3}(m-1)\alpha-\frac{2}{3}(m-1)\beta-\frac{1}{4}m^2+\frac{1}{3}m$$

ここに $\alpha, \beta=1\pm\sqrt{1-m}$ を代入

$$\frac{4}{3}(m-1)(1-\sqrt{1-m})-\frac{2}{3}(m-1)(1+\sqrt{1-m})-\frac{1}{4}m^2+\frac{1}{3}m$$

$$=m-\frac{2}{3}+2(1-m)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}m^2=g(m) \text{ とおく}$$

$\sqrt{1-m}=t$ とおくと　$0\leqq m\leqq 1$ より　　$0\leqq t\leqq 1$

$g(m)=m-\frac{2}{3}+2(1-m)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}m^2=m-1+\frac{1}{3}+2\left\{(1-m)^{\frac{1}{2}}\right\}^3-\frac{1}{4}m^2=-t^2+\frac{1}{3}+2t^3-\frac{1}{4}(1-t^2)^2$

$=2t^3-t^2+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}t^4+2t^3-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{12}=h(t)$ とおく

$h'(t)=-t^3+6t^2-t=-t(t^2-6t+1)$

$h'(t)=0$ となるのは　$t=0,\ 3\pm\sqrt{9-1}=3\pm2\sqrt{2}$

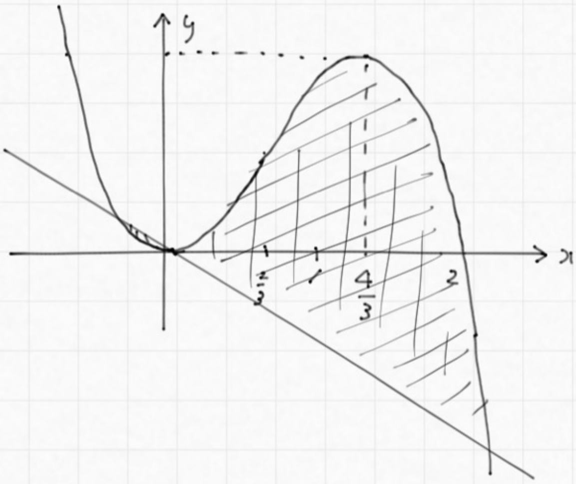
t	0	$\cdots$	$3-2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$0\leqq t\leqq 1$ における $h(t)$ の増減は次のようになる

よってこの区間で $h(t)$ が最小となるのは $t=3-2\sqrt{2}$ のときで

$h(3-2\sqrt{2})=\frac{8}{3}(17-12\sqrt{2})$

$m<0$ のとき



このとき　$m=0$ のときと比べて，面積は明らかに大きい

以上より $t=3-2\sqrt{2}$，（$m=12\sqrt{2}-16$ のとき）

S は最小となり 最小値は $\frac{8}{3}(17-12\sqrt{2})$