2020鹿児島大

1 (1) $p = a^2 - a + 2ab + b^2 - b = (a+b)^2 - (a+b) = \underline{(a+b)(a+b-1)}$

〜〜部は連続した2つの整数で、これが素数となるのは $a+b$ と $a+b-1$ のいずれかが1のときに限られる.

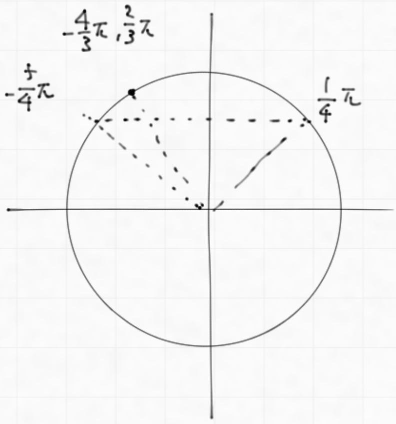
$a+b=1$ のとき. $p = 1\times 0 = 0$ となるので不適.

$a+b-1=1$ のとき. $p = 2\times 1 = 2$ となり pは素数.

ここで $a+b=2$ を満たす自然数 a, b は $a=b=1$ に限られる　∴ $\boldsymbol{a=b=1}$

(2) $\sqrt{2}\sin x - 1 = \sqrt{6}\cos x + 1 \iff \sqrt{2}\sin x - \sqrt{6}\cos x = 2$

$\iff 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 2 \iff \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ …①



$-\pi \leqq x \leqq \pi$ だから　$-\frac{4}{3}\pi \leqq x - \frac{\pi}{3} \leqq \frac{2}{3}\pi$

この範囲で ① を満たすのは $x - \frac{\pi}{3} = -\frac{5}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi$

∴ $x = \boldsymbol{-\frac{11}{12}\pi, \frac{7}{12}\pi}$

(3) 偶数のカードを引く事象をA、n以下のカードを引く事象をBとし、それぞれの起こる確率を P(A), P(B) などと表す.

$$P(A) = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

nが偶数のとき. n以下の偶数のカードは $2, 4, 6, \cdots n$ の $\frac{n}{2}$ 枚. だから

$$P(A\cap B) = \frac{\frac{n}{2}}{2n} = \frac{1}{4}$$

nが奇数のとき. n以下の偶数のカードは $2, 4, 6, \ldots n-1$ の $\frac{n-1}{2}$ 枚 だから

$$P(A\cap B) = \frac{\frac{n-1}{2}}{2n} = \frac{n-1}{4n}$$

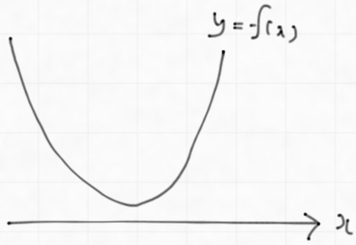
以上より

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} & (n\text{が偶数のとき}) \\ \dfrac{\frac{n-1}{4n}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{n-1}{2n} & (n\text{が奇数のとき}) \end{cases}$$

2020鹿児島大

2 (1) $f(x)=x^2+(a+1)x+2a$ とおく

すべての実数xに対して $f(x)>0$ となるのは右のように $y=f(x)$ のグラフが常にx軸の上側にあるときで、これは $f(x)=0$ の方程式が解を持たないことに等しい。$f(x)=0$ の判別式をDとして、その条件は $D<0$ だから.



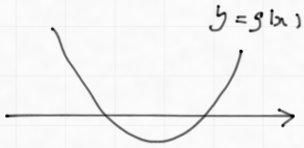
$$D=(a+1)^2-4\cdot 2a=a^2-6a+1<0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{3-2\sqrt{2}<a<3+2\sqrt{2}}$$

(2) $g(x)=bx^2+tx+(b+t)$ とおく.

(i) $b=0$ のとき $g(x)=tx+t=t(x-1)$ となるが、$t>0$ だから $x<1$ のとき $g(x)<0$ となるので、$g(x)<0$ を満たすxが存在する.

(ii) $b>0$ のとき $g(x)<0$ となるxが存在するのは、右のように $y=g(x)$ のグラフがx軸と、異なる2点で交わるときであり、それは $g(x)=0$ が異なる2解をもつときである。そのための条件は $g(x)=0$ の判別式をD_2として $D_2>0$ であるから.

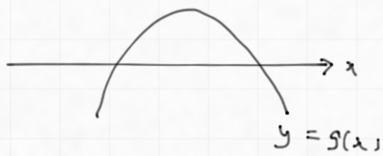


$$D_2=t^2-4b(b+t)>0 \Leftrightarrow 4b^2+4tb-t^2<0 \Leftrightarrow -\frac{1+\sqrt{2}}{2}t<b<\frac{\sqrt{2}-1}{2}t$$

$b>0$だから $0<b<\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}t$

(iii) $b<0$ のとき

$y=g(x)$ のグラフは上に凸なので $g(x)<0$ となるxは必ず存在する.



(i)〜(iii)より Bに属するbの範囲は $\mathbf{b<\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}t}$

(3) (1), (2)より $A\cap B$が空集合でないのは

$$3-2\sqrt{2}<\frac{\sqrt{2}-1}{2}t$$

が成り立つときで、これを整理して.

$$2\sqrt{2}-2<t \qquad \therefore\ \mathbf{t>2(\sqrt{2}-1)}$$

2020 鹿児島大

4 (1) $a_2 = a_1 + \sqrt{3} b_1 = 0 + \sqrt{3} \cdot 1 = \sqrt{3}$

$b_2 = -\sqrt{3} a_1 + b_1 = -\sqrt{3} \cdot 0 + 1 = 1$

$a_3 = a_2 + \sqrt{3} b_2 = \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot 1 = 2\sqrt{3}$

$b_3 = -\sqrt{3} a_2 + b_2 = -\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 1 = -2$

$a_4 = a_3 + \sqrt{3} b_3 = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot (-2) = 0$

$b_4 = -\sqrt{3} a_3 + b_3 = -\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} - 2 = -8$

$\mathbf{a_2 = \sqrt{3},\ a_3 = 2\sqrt{3},\ a_4 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = -2,\ b_4 = -8}$

(2) $a_{n+3} = a_{n+2} + \sqrt{3} b_{n+2}$

$= (a_{n+1} + \sqrt{3} b_{n+1}) + \sqrt{3}(-\sqrt{3} a_{n+1} + b_{n+1})$

$= -2 a_{n+1} + 2\sqrt{3} b_{n+1}$

$= -2(a_n + \sqrt{3} b_n) + 2\sqrt{3}(-\sqrt{3} a_n + b_n)$

$= -8 a_n$

$b_{n+3} = -\sqrt{3} a_{n+2} + b_{n+2}$

$= -\sqrt{3}(a_{n+1} + \sqrt{3} b_{n+1}) + (-\sqrt{3} a_{n+1} + b_{n+1})$

$= -2\sqrt{3} a_{n+1} - 2 b_{n+1}$

$= -2\sqrt{3}(a_n + \sqrt{3} b_n) - 2(-\sqrt{3} a_n + b_n)$

$= -8 b_n$

(3) $\sum_{n=1}^{9} a_n = (0 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}) + (0 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3})(-8) + (0 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3})(-8)^2$

$= 3\sqrt{3} \times (1 - 8 + 64) = \mathbf{171\sqrt{3}}$

(4) $2020 = 3 \times 673 + 1$ だから $b_{2020} = b_1 \times (-8)^{673} = (-8)^{673}$

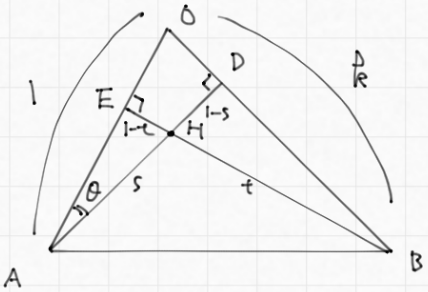
$\sum_{n=1}^{2020} a_n = (0 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3})\left(1 + (-8)^1 + (-8)^2 + \cdots + (-8)^{672}\right) + a_{2020}$

$= 3\sqrt{3} \times \dfrac{1 - (-8)^{673}}{1+8} + a_1(-8)^{673} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}(-8)^{673} + 0$

$T = \dfrac{1}{\sqrt{3}} b_{2020} + \sum_{n=1}^{2020} a_n = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-8)^{673} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-8)^{673} = \mathbf{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

2020 鹿児島大

5



(1) $OD = OA\sin\theta = \mathbf{\sin\theta}$

$\angle AOB = \phi$ とすると △OADの内角の和がπだから

$$\theta + \phi + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$OE = OB\cos\phi = k\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \mathbf{k\sin\theta}$$

(2) HはADをs:1-sに内分すると考えると　$\overrightarrow{OH} = (1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OD}$

HはBEをt:1-t　〃　$\overrightarrow{OH} = t\overrightarrow{OE} + (1-t)\overrightarrow{OB}$

ここで $\overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}\times|\overrightarrow{OD}| = \frac{\sin\theta}{k}\overrightarrow{OB}$,　$\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}\times|\overrightarrow{OE}| = k\sin\theta\,\overrightarrow{OA}$　だから

$\overrightarrow{OH} = (1-s)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{s}{k}\sin\theta\right)\overrightarrow{OB}$ …①　　$\overrightarrow{OH} = (kt\sin\theta)\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}$ …②

①, ②について $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ は互いに1次独立だから

$1-s = kt\sin\theta$　かつ　$\frac{s}{k}\sin\theta = 1-t$

連立して　$(1-kt\sin\theta)\sin\theta = k(1-t)$

$$kt - kt\sin^2\theta = k - \sin\theta$$

$$kt\cos^2\theta = k - \sin\theta$$

△OABは鋭角三角形だから $\theta < \frac{\pi}{2}$ であり $\cos^2\theta > 0$ なので.　$t = \frac{k-\sin\theta}{k\cos^2\theta}$

$$\therefore\ \overrightarrow{OH} = \frac{k\sin\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta}\overrightarrow{OA} + \frac{\sin\theta - k\sin^2\theta}{k\cos^2\theta}\overrightarrow{OB}$$

(3) △OABの重心をGとすると

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$$

$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$ が成り立つとき

$$\frac{k\sin\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{3},\quad \frac{\sin\theta - k\sin^2\theta}{k\cos^2\theta} = \frac{1}{3}$$

連立する

$$\frac{k\cancel{\sin\theta} - \sin^{\cancel{2}}\theta}{\cancel{\cos^2\theta}} = \frac{\overset{1}{\cancel{\sin\theta}} - k\sin^{\cancel{2}}\theta}{k\cancel{\cos^2\theta}}$$

$$k^2 - \cancel{k\sin\theta} = 1 - \cancel{k\sin\theta}$$

$$k = 1 \quad (\because k > 0)$$

このとき　$3\sin\theta - 3\sin^2\theta = 1 - \sin^2\theta \iff 2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0 \iff (2\sin\theta - 1)(\sin\theta - 1) = 0$

$\sin\theta = \frac{1}{2}, 1$　だから　$\theta = \mathbf{\frac{\pi}{6}}$　$\left(\because \theta < \frac{\pi}{2}\right)$