放物線で囲まれる図形とその面積

2つの放物線 $C_1: y=x^2$, $C_2: y=x^2-2ax+2a^2$ を考える。ただし、$a>0$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 放物線 C_2 の頂点の座標を a を用いて表せ。

(2) 2つの放物線 C_1, C_2 の共通接線を l とし、C_1 と l との接点の x 座標を p、C_2 と l との接点の x 座標を q とする。p と q の値および l の方程式を、それぞれ a を用いて表せ。

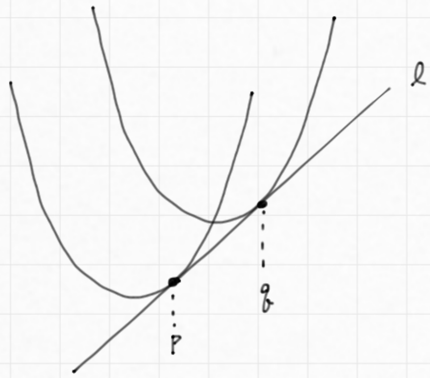
(3) 放物線 C_1, C_2 および接線 l によって囲まれる図形の面積を S_1 とする。S_1 を a を用いて表せ。

(4) 点 $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}\right)$ における C_1 の接線を m とする。このとき、m の方程式を a を用いて表せ。また、m と接線 l との交点の x 座標を求めよ。

(5) 放物線 C_1 および接線 l, m によって囲まれた図形の面積を S_2 とする。S_2 を a を用いて表せ。さらに $\frac{S_2}{S_1}$ の値を求めよ。

2015 長崎大

(1) $C_2: y=x^2-2ax+2a^2=(x-a)^2+a^2$ 　頂点は (a, a^2)



(2) C_1 上の点 (p, p^2) における接線は $y'=2x$ だから

$$y=2p(x-p)+p^2=2px-p^2$$

これと C_2 の式を連立

$$x^2-2ax+2a^2=2px-p^2$$

$$x^2-2(a+p)x+2a^2+p^2=0 \quad \cdots ①$$

l と C_2 が接するとき、上式は重解をもつ。判別式を D として

$$D/4=(a+p)^2-2a^2-p^2=-a^2+2ap=a(2p-a)=0$$

$a \neq 0$ だから $p=\frac{a}{2}$

これを①に代入 $x^2-3ax+\frac{9}{4}a^2=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}a\right)^2=0$ 　$\therefore x=\frac{3}{2}a=q$

また l は $l: y=2\cdot\frac{a}{2}x-\left(\frac{a}{2}\right)^2=ax-\frac{1}{4}a^2$

$p=\frac{a}{2}$, $q=\frac{3}{2}a$, $l: y=ax-\frac{1}{4}a^2$

(3) C_1 と C_2 の交点は $x^2=x^2-2ax+2a^2$ より $x=a$

したがって S_1 は

$$S_1=\int_{\frac{a}{2}}^{a} x^2-\left(ax-\frac{1}{4}a^2\right)dx+\int_{a}^{\frac{3}{2}a} x^2-2ax+2a^2-\left(ax-\frac{1}{4}a^2\right)dx=\int_{\frac{a}{2}}^{a}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2dx+\int_{a}^{\frac{3}{2}a}\left(x-\frac{3}{2}a\right)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{a}{2}\right)^3\right]_{\frac{a}{2}}^{a}+\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}a\right)^3\right]_{a}^{\frac{3}{2}a}=\frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3\times 2=\frac{1}{12}a^3$$

(4) m の傾きは $2\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)=-a$.

したがって m は $y=-a\left(x+\frac{a}{2}\right)+\frac{a^2}{4}=-ax-\frac{1}{4}a^2$ 　$m: y=-ax-\frac{1}{4}a^2$

m と l の交点は $ax-\frac{1}{4}a^2=-ax-\frac{1}{4}a^2$ より $x=0$. 　$\therefore x=0$

(5)

$$S_2=\int_{-\frac{a}{2}}^{0} x^2-\left(-ax-\frac{1}{4}a^2\right)dx+\int_{0}^{\frac{a}{2}} x^2-\left(ax-\frac{1}{4}a^2\right)dx=\int_{-\frac{a}{2}}^{0}\left(x+\frac{1}{2}a\right)^2dx+\int_{0}^{\frac{a}{2}}\left(x-\frac{1}{2}a\right)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{2}a\right)^3\right]_{-\frac{a}{2}}^{0}+\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}a\right)^3\right]_{0}^{\frac{a}{2}}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}a\right)^3\times 2=\frac{1}{12}a^3$$

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\frac{1}{12}a^3}{\frac{1}{12}a^3}=1$$

三角錐の体積

4点 O(0,0,0), A(4,0,0), D(0,0,4) をとり、右図のように線分 OA, OC, OD を3辺とする立方体 OABC-DEFG を考える。辺 DE, BF の中点を、それぞれ M, N とする。以下の問いに答えよ。

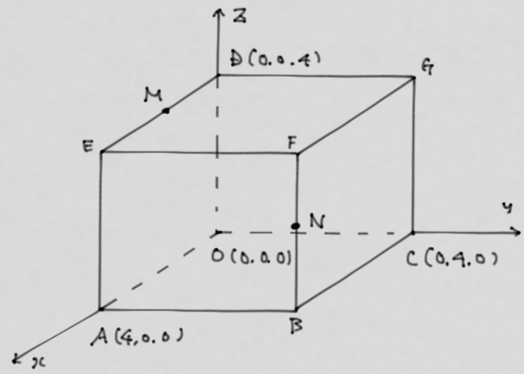
(1) ベクトル $\overrightarrow{GM}$ および $\overrightarrow{GN}$ を成分で表せ。

(2) $\angle MGN=\theta$ とする。$\cos\theta$ の値を求めよ。

(3) 3点 G, M, N を頂点とする三角形 GMN の面積を求めよ。

(4) 三角錐 FGMN において、三角形 GMN を底面としたときの高さを求めよ。

(5) 三角形 GMN を含む平面と線分 OF との交点を P とする。このとき、$\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OF}$ を用いて表せ。



2015 長崎大

(1) $\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OG}=\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OG}=\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}$

(2) $|\overrightarrow{GM}|=\sqrt{2^2+(-4)^2+0^2}=2\sqrt{5}$, $\quad|\overrightarrow{GN}|=\sqrt{4^2+0^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$

$\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{GN}=\begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}=8-0+0=8$ $\quad\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{GN}}{|\overrightarrow{GM}||\overrightarrow{GN}|}=\dfrac{8}{2\sqrt{5}\times2\sqrt{5}}=\dfrac{2}{5}$

(3) $\triangle GMN=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{GM}|^2|\overrightarrow{GN}|^2-(\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{GN})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{5})^2(2\sqrt{5})^2-8^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{400-8^2}=2\sqrt{25-4}=2\sqrt{21}$

(4) FGMN の体積について $\triangle FGN$ を底面として考えると $\triangle FGN=\frac{1}{2}\times4\times2=4$

高さは 4 の三角錐だから体積Vは $\quad V=4\times4\times\frac{1}{3}=\frac{16}{3}$

GMNを底面、高さをhとすると $\quad V=\frac{1}{3}\triangle GMN\times h=\frac{1}{3}\times2\sqrt{21}\,h$

$$h=\frac{3V}{2\sqrt{21}}=\frac{\cancel{16}\,8}{\cancel{2}\sqrt{21}}=\frac{8\sqrt{21}}{21}$$

(5) Pは平面GMN上の点なので $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OG}+l\overrightarrow{OM}+m\overrightarrow{ON}$ $\quad(k+l+m=1)$

と表すことができる。G, M, Nの成分を代入して

$$\overrightarrow{OP}=k\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}\quad\cdots①$$

また Pは $\overrightarrow{OF}$ 上にもあるので $\quad\overrightarrow{OP}=n\overrightarrow{OF}=n\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}\quad\cdots②$

とも表せる ①、②より、

$$2l+4m=4n,\quad 4k+4m=4n,\quad 4k+4l+2m=4n$$

$$l=2n-2m,\quad k=n-m,\quad 2k+2l+m=2n,\quad k+l+m=1$$

k, l を消去して $\quad 4n-4m+\cancel{2n}-2m+m=\cancel{2n}\quad n-\cancel{m}+2n-2m+\cancel{m}=1$

$\Leftrightarrow\quad 4n-5m=0\quad 3n-2m=1\quad m=\frac{4}{7},\ n=\frac{5}{7}\quad\therefore\ \overrightarrow{OP}=\frac{5}{7}\overrightarrow{OF}$