聖マリアンナ医大

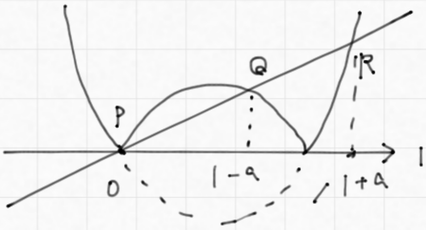
1 (1) $2020 = 2^2 \times 5^1 \times 101$ 　　$(2+1)\times(1+1)\times(1+1) = \underline{\mathbf{12}}$ (ア)

$(2^0+2^1+2^2)(5^0+5^1)(101^0+101^1) = 7\times 6\times 102 = \underline{\mathbf{4284}}$ (イ)

(2) 平面ABCは 　$x+y+z=1$ 　　$\overrightarrow{OE} = s\overrightarrow{OD}$ がこの上にあるとき.

$s+s+s=1$ より $s=\frac{1}{3}$ 　　$\therefore$ 　$OE : ED = |\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}| : |\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}| = \underline{\mathbf{1:2}}$ (ウ)(エ)

(3) C : $y = |2x(x-1)|$ だからグラフは下のようになる

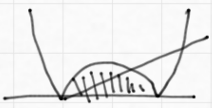


$2x(x-1) = 2ax$ より $x = 0,\ 1+a$

$-2x(x-1) = 2ax$ より $x = 0,\ 1-a$

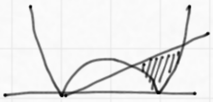
P.Q.Rのx座標は $\underline{\mathbf{0,\ 1-a,\ 1+a}}$ (オカキ)

$S_1 = \frac{2}{6}(1-a)^3 = \frac{1}{3}(1-a)^3$



$S_2 = \frac{2}{6}(1-0)^3 = \frac{1}{3}$

$S_3 = \frac{2}{6}(1+a)^3 = \frac{(1+a)^3}{3}$



$= S_3 + S_1 - 2S_2 = \frac{(1+a)^3}{3} + \frac{(1-a)^3}{3} - \frac{2}{3}$

$\frac{(1+a)^3}{3} + \frac{(1-a)^3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{(1-a)^3}{3}$ 　となるのは

$(1+a)^3 = 2$

$1+a = \sqrt[3]{2}$ 　　　$\therefore a = \underline{\mathbf{\sqrt[3]{2}-1}}$ (ク)

$(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

2020 聖マリアンナ医大

2 $|z^5|=1$ のとき $|z|=1$ だから $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおける

$z^5=\cos5\theta+i\sin5\theta=0$ より $5\theta=2n\pi$ $\theta=\frac{2}{5}n\pi$ $(n=0.1.2.3.4)$

z_1は実数でない虚数で偏角が最小のものだから

$z_1=1\left(\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi\right)$

$z_1+\frac{1}{z_1}=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi+\left(\cos\left(-\frac{2}{5}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{5}\pi\right)\right)=2\cos\frac{2}{5}\pi$

同様に $z^5=-1$ より $\cos5\theta+i\sin5\theta=\cos\pi+i\sin\pi$

$5\theta=\pi+2n\pi$ $\theta=\frac{1}{5}\pi+\frac{2}{5}n\pi$ $(n=0,1,2,3.4)$

$z_2=\cos\frac{1}{5}\pi+i\sin\frac{1}{5}\pi$

$\arg z_1^2=\frac{4}{5}\pi$, $\arg z_2=\frac{1}{5}\pi$, $\arg z_1^3=\frac{6}{5}\pi$, $\arg z_1=\frac{2}{5}\pi$, $\arg z_2^2=\frac{2}{5}\pi$.

$\arg z_1^3z_2^4=\frac{6}{5}\pi+\frac{4}{5}\pi=\frac{10}{5}\pi=2\pi$ $\arg z_1^4=\frac{8}{5}\pi$, $\arg z_2^3=\frac{3}{5}\pi$

以上より正しいものは ② ③ ④

(3) $z_1^5=1 \Leftrightarrow (z_1-1)(z_1^4+z_1^3+z_1^2+z_1+1)=0$

$z_1\neq1$ なので $z_1^4+z_1^3+z_1^2+z_1+1=0 \Leftrightarrow z_1^2+z_1+1+\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_1^2}=0$ …(＊)

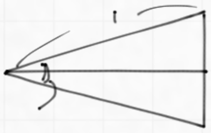
$x_1^2=z_1^2+\frac{1}{z_1^2}+2$ を用いて(＊)は $x_1^2-2+x_1+1=0 \Leftrightarrow x_1^2+x_1-1=0$ ⑤

$z_2^5+1=0 \Leftrightarrow (z_2+1)(z_2^4-z_2^3+z_2^2-z_2+1)=0$

$z_2\neq-1$なので $z_2^4-z_2^3+z_2^2-z_2+1=0 \Leftrightarrow z_2^2-z_2+1-\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_2^2}=0$

$x_2^2=z_2^2+\frac{1}{z_2^2}+2$ を用いて $x_2^2-2-x_2+1=0 \Leftrightarrow x_2^2-x_2-1=0$ ③

(4)



$\frac{2\pi}{10}\left(=\frac{1}{5}\pi\right)$

$S=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\frac{1}{5}\pi\times10=5\sin\frac{1}{5}\pi$

$x_2=\frac{+1\pm\sqrt{5}}{2}=2\cos\frac{\pi}{5}$ だから $x_2=\frac{+1+\sqrt{5}}{2}=2\cos\frac{\pi}{5}$

$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{+1+\sqrt{5}}{4}$ $1-\cos^2\frac{\pi}{5}=1-\frac{6+2\sqrt{5}}{16}=\frac{10-2\sqrt{5}}{16}=\frac{5-\sqrt{5}}{8}$

$S=5\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}=\frac{5}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

$S^2=\frac{25}{16}(10-2\sqrt{5})$ $2.2<\sqrt{5}<2.3$ だから

$8.4375<S^2<8.75$

$2.6^2=6.76$, $2.7^2=7.29$, $2.8^2=7.84$ $2.9^2=8.41$ $3.0^2=9$ ④

2020 聖マリアンナ医大

3 (1) $a=1$ のとき　$a_2=f(a_1)=1^1=1$　$a_3=f(1)=1$, $a_4=f(1)=1$　$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

$a=2$ のとき　$a_2=2^2=4$.　$a_3=2^4=16$.　$a_4=2^{16}=1024\times 64=65536$

(2) 図より　$P_1(a_n, a_n)$　$P_2(a_n, a^{a_n})=(a_n, a_{n+1})$, $P_3(a_{n+1}, a_{n+1})$

$P_4(a_{n+1}, a_{n+2})$

③ ④ ④ ⑤

(3) $(a^x)'=(\log a)a^x$

接点のx座標をαとして　$\alpha=a^\alpha$ かつ $1=(\log a)a^\alpha$

連立して　$1=(\log a)\alpha$　$\Leftrightarrow$　$\log a^\alpha = 1 = \log e$　$\Leftrightarrow$　$a^\alpha = e$　$\therefore$ $\alpha = e$

$a^e = e$ より　$e\log a = 1$　$a = e^{\frac{1}{e}}$

(2) の議論より　$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha = e$

2020 聖マリアンナ医大

4

(1) $2020 = 288 \times 7 + 4$ $\quad \therefore\ \overline{2020} = 4$

$-100 = -15 \times 7 + 5$ $\quad \therefore\ \overline{-100} = 5$

(2) $4 \times 4 = 16 = 2 \times 7 + 2$ $\quad$ (a) = 2

$5 \times 5 = 25 = 3 \times 7 + 4$ $\quad$ (b) = 4

$5 \times 6 = 30 = 4 \times 7 + 2$ $\quad$ (c) = 2

(3) $a = pA + \overline{a}$, $b = pB + \overline{b}$ とおく

$$ab = (pA + \overline{a})(pB + \overline{b}) = p(pAB + A\overline{b} + B\overline{a}) + \overline{a}\,\overline{b}$$

よって $\overline{ab} = \overline{\overline{a}\,\overline{b}}$ が成り立つ。

(4) $0 \leqq j < k \leqq p-1$ を満たす j, k を考える。

aj と ak を p で割った余りが等しいと仮定すると $ak - aj$ は p の倍数となる。

ところが $k-j$ について $1 \leqq k-j \leqq p-1$ なので $k-j$ は p の倍数ではなく、

$\overline{a} \neq 0$ なので $\overline{a(k-j)} \neq 0$ であり、$\overline{aj} \neq \overline{ak}$

したがって $\overline{a \cdot 0}, \overline{a \cdot 1}, \overline{a \cdot 2}, \overline{a \cdot 3} \ldots, \overline{a \cdot (p-1)}$ の p 個の値は全て異なるが、

p で割った余りは $0, 1, 2 \ldots p-1$ の p 通りしかないので

$\overline{a \cdot 0}, \overline{a \cdot 1}, \overline{a \cdot 2}, \overline{a \cdot 3} \ldots, \overline{a \cdot (p-1)}$ の p 個の値のうちに 1 が必ず1つ含まれている。

これは(5)で $\overline{ab}=1$ となる b が $p-1$ 以下に含まれることを示している。また(3)で $a=b$ とすることで $\overline{a^2} = \overline{\overline{a}^2}$、繰り返すことで $\overline{a^n} = \overline{\overline{a}^n}$ も成り立つことが分かる。

$\overline{a} = 1$ のとき $\overline{a^6 - 1} = \overline{\overline{a}^6 - 1} = \overline{1^6 - 1} = 0$

$\overline{a} = 2$ のとき $\overline{a^6 - 1} = \overline{\overline{a}^6 - 1} = \overline{2^6 - 1} = \overline{63} = 0$

$\overline{a} = 3$ のとき $\overline{a^6 - 1} = \overline{\overline{a}^6 - 1} = \overline{3^6 - 1} = \overline{(3^3+1)(3^3-1)} = \overline{28 \cdot 8} = 0$

$\overline{a} = 4$ のとき $\overline{a^6 - 1} = \overline{\overline{a}^6 - 1} = \overline{4^6 - 1} = \overline{(4^3+1)(4^3-1)} = \overline{65 \cdot 63} = 0$

$\overline{a} = 5$ のとき $\overline{a^6 - 1} = \overline{\overline{a}^6 - 1} = \overline{5^6 - 1} = \overline{(5+1)(5^2-5+1)(5-1)(5^2+5+1)} = 0$

$\overline{a} = 6$ のとき $\overline{a^6 - 1} = \overline{\overline{a}^6 - 1} = \overline{6^6 - 1} = \overline{(-1)^6 - 1} = \overline{1-1} = 0$

以上より a が 7 の倍数でないとき $a^6 - 1$ は 7 の倍数ではない。