1

(1) $x^2+y^2=2 \iff \begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta \\ y=\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$ $(0\leqq\theta<2\pi)$

これを x^2+2y に代入

$$x^2+2y = 2\cos^2\theta+2\sqrt{2}\sin\theta = 2(1-\sin^2\theta)+2\sqrt{2}\sin\theta =$$

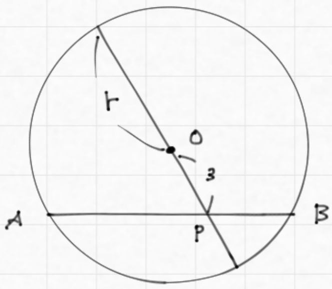
$$= -2\left(\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+3$$

よって $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき x^2+2y は最大値3をとり. $\sin\theta=-1$ のとき最小値 $-2\sqrt{2}$ をとる

最大値 $\mathbf{3}$. このとき $(x,y)=\mathbf{(\pm1,\ 1)}$ $\left(\theta=\frac{\pi}{4}\text{ または }\frac{3}{4}\pi\right)$

最小値 $\mathbf{-2\sqrt{2}}$ このとき $(x,y)=\mathbf{(0,-\sqrt{2})}$ $\left(\theta=\frac{3}{2}\pi\right)$

(2)



方べきの定理より

$$AP\cdot BP=(r+3)(r-3)=7$$

$$\therefore\ r=\mathbf{4}$$

(3) $a=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \iff \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a}{\sqrt{2}}$

よって $\tan\theta$ が存在するのは $-1\leqq\frac{a}{\sqrt{2}}\leqq1$ かつ $\theta\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$ のとき.

ところが

$\theta=\frac{\pi}{2}+n\pi$ とすると $a=\pm1$ であるが, このとき $\sin\theta+\cos\theta=\pm1$ より

$\theta=\pm\pi$ となり. $\tan\theta$ は存在し. $\tan\theta=0$.

$\theta\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$ のとき.

$\sin\theta=a-\cos\theta$ を $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入

$$a^2-2a\cos\theta+2\cos^2\theta=1 \qquad \therefore\ \cos\theta=\frac{a\pm\sqrt{2-a^2}}{2}$$

$$\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}-1=\frac{2}{a\pm\sqrt{2-a^2}}-1=\frac{2-a\mp a\sqrt{2-a^2}}{a\pm\sqrt{2-a^2}}$$

$$\tan\theta=\sqrt{\frac{2-a\mp a\sqrt{2-a^2}}{a\pm\sqrt{2-a^2}}}=\frac{1\pm a\sqrt{2-a^2}}{a^2-1}$$

以上より. $\tan\theta$ が存在する a の値の範囲は $\mathbf{-\sqrt{2}\leqq a\leqq\sqrt{2}}$

$$\tan\theta=\begin{cases}\dfrac{1\pm a\sqrt{2-a^2}}{a^2-1} & (a\neq\pm1)\\[2ex] 0 & (a=\pm1)\end{cases}$$

(4) $n = 10a + b = 9c + d = 8c + d + 3 = 7d + c$

$1 \leqq a \leqq 9 \qquad 1 \leqq c \leqq 8 \qquad 1 \leqq c \leqq 7 \qquad 1 \leqq d \leqq 6$

$0 \leqq b \leqq 9 \qquad 0 \leqq d \leqq 8 \qquad 0 \leqq d+3 \leqq 7 \qquad 0 \leqq c \leqq 6 \qquad \cdots ①$

$9c + d = 7d + c$ より $\quad 4c = 3d$

これを満たし、かつ①を満たす整数は $c=3,\ d=4$ のみ.

これを上の式に代入

$n = 9 \times 3 + 4 = 31$

②

(1) $f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$

$= e^{-x}(\cos x - \sin x) = e^{-x} \times \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$

$f'(x)=0$となるのは $x+\frac{3}{4}\pi = n\pi$ のときで、$[0, 3\pi]$ の範囲では $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}$

$f(x)$の増減は次のようになる

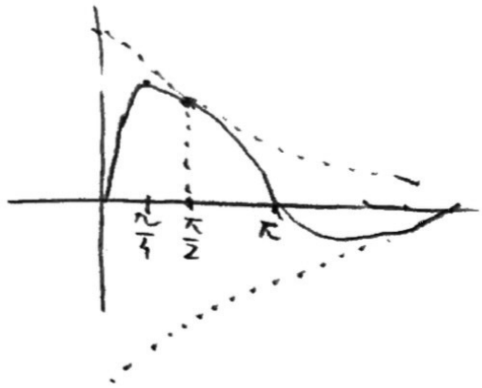
x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{9}{4}\pi$	$\cdots$	3π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗		↘		↗		↘	

$x = \frac{\pi}{4}, \frac{9}{4}\pi$のとき極大となり、その値は $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$, $f\left(\frac{9}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{9}{4}\pi}$

$x = \frac{5}{4}\pi$ のとき極小となり、その値は $f\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5}{4}\pi}$

(2) $S_0 = \int_0^{\pi} |f(x)|\,dx$

$= \int_0^{\pi} |e^{-x}\sin x|\,dx = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$



ここで

$I = \int e^{-x}\sin x\,dx$ とおくと、

$= -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x\,dx$

$= -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\,dx$

$= -e^{-x}(\cos x + \sin x) - I$.

$\therefore\ I = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x) + C$ （Cは積分定数）

となるので

$S_0 = \left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x)\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2}e^{-\pi}(-1+0) + \frac{1}{2}e^{-0}(1-0)$

$= \frac{1}{2}e^{-\pi} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{e^{\pi}+1}{2e^{\pi}}}}$

(3) $|f(x-n\pi)| = |e^{-x+n\pi}\sin(x-n\pi)| = |e^{-x+n\pi}\sin x|$

$= |e^{-x}e^{n\pi}\sin x| = e^{n\pi}|e^{-x}\sin x| = e^{n\pi}|f(x)|$

$\therefore\ |f(x)| = e^{-n\pi}|f(x-n\pi)|$

証明終

(4) $S_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(x)|\,dx$ とする

(3) より

$$S_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-n\pi} |f(x-n\pi)|\,dx$$

$$= e^{-n\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(x-n\pi)|\,dx$$

$$= e^{-n\pi} \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x-n\pi)\,dx \right|$$

$x - n\pi = t$ とすると

x	$n\pi \to (n+1)\pi$
t	$0 \to \pi$

$$S_n = e^{-n\pi} \left| \int_0^{\pi} f(t)\,dt \right| = e^{-n\pi} S_0$$

$x<0$ の範囲を考えれば $S \to \infty$ となり不合理だから $x \geqq 0$ と考えて.

$$S = S_0 + S_1 + S_2 + \cdots$$

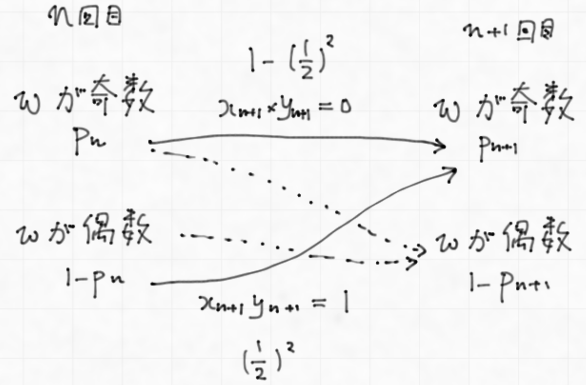
$$= S_0 \times \frac{1}{1-e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi}+1}{2e^{\pi}} \times \frac{e^{\pi}}{e^{\pi}-1} = \frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}$$

2018 兵庫医科

(1) m回表がでて、他は裏がでる

$$\left(\frac{1}{2}\right)^m\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}{}_nC_m = \frac{{}_nC_m}{2^n}$$

(2)



左図より漸化式を立てると

$$p_{n+1} = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)p_n + \frac{1}{2^2}\times(1-p_n)$$

$$= \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}$$

$$p_{n+1}-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$$

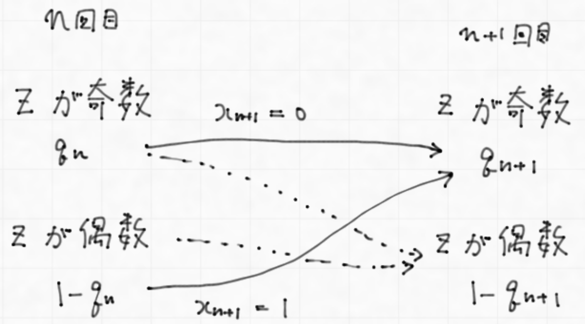
$\left\{p_n-\frac{1}{2}\right\}$は初項 $p_1-\frac{1}{2}$，公比$\frac{1}{2}$の等比数列

で、$p_1=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ なので

$$p_n-\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\therefore\ p_n = \frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

(3)



左図より

$$q_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}(1-q_n) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ q_n = \frac{1}{2}$$

$$p_n - q_n = \frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{2} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < 0$$

よって $p_n < q_n$