2019 大医(後)

1 (1) $|z|=1$ より $z\bar{z}=1$ $\quad \therefore \bar{z}=\dfrac{1}{z}$

また $\overline{\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)} = \dfrac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} = \dfrac{\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}-1} = \dfrac{1+z}{1-z} = -\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$ $\quad \therefore \dfrac{z+1}{z-1}$ は純虚数

(2) 条件より

$$\overline{\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha}\right)} = -\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{z}-\bar{\alpha}}{\bar{z}-\bar{\alpha}} = -\frac{z-\alpha}{z-\alpha} \Leftrightarrow (\bar{z}-\bar{\beta})(z-\alpha) = -(z-\beta)(\bar{z}-\bar{\alpha})$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z}-\alpha\bar{z}-\bar{\beta}z+\alpha\bar{\beta}+z\bar{z}-\bar{\alpha}z-\beta\bar{z}+\bar{\alpha}\beta=0$$

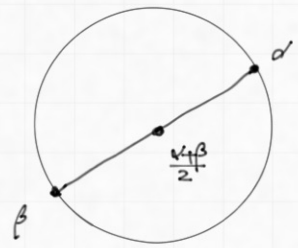
$$\Leftrightarrow z\bar{z}-\frac{1}{2}(\bar{\alpha}+\bar{\beta})z-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\bar{z}+\frac{1}{2}\alpha\bar{\beta}+\frac{1}{2}\bar{\alpha}\beta=0$$

$$\Leftrightarrow \left(z-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta\right)\left(\bar{z}-\frac{1}{2}\bar{\alpha}-\frac{1}{2}\bar{\beta}\right)+\frac{1}{2}\alpha\bar{\beta}+\frac{1}{2}\bar{\alpha}\beta-\frac{1}{4}(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})=0$$

$$\Leftrightarrow \left|z-\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^2=\frac{1}{4}|\alpha-\beta|^2$$

$$\Leftrightarrow \left|z-\frac{\alpha+\beta}{2}\right|=\frac{|\alpha-\beta|}{2}$$

z は $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ を中心とし、半径 $\dfrac{|\alpha-\beta|}{2}$ の円周上にある (α, β を直径とする円周上)



2019大阪医大(後)

2 (1) $_6C_4 = {}_6C_2 = 15$ 通り

(2)

X_1	X_2	X_3	X_4	$A(=X_4-X_1)$	$B(=X_3-X_2)$
1	2	3	4	3	1
1	2	3	5	4	1
1	2	3	6	5	1
1	2	4	5	4	2
1	2	4	6	5	2
1	2	5	6	5	3
1	3	4	5	4	1
1	3	4	6	5	1
1	3	5	6	5	2
1	4	5	6	5	1
2	3	4	5	3	1
2	3	4	6	4	1
2	3	5	6	4	2
2	4	5	6	4	1
3	4	5	6	3	1

$(A,B) = (3,1), (4,1), (4,2), (5,1), (5,2), (5,3)$

6通り

(3)

$(A,B) = (3,1)$ 3通り

$(A,B) = (4,1)$ 4 〃

$(A,B) = (4,2)$ 2 〃

$(A,B) = (5,1)$ 3 〃

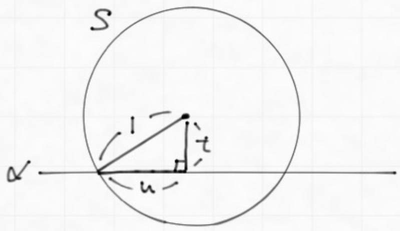
$(A,B) = (5,2)$ 2 〃

$(A,B) = (5,3)$ 1 〃

最大となるのは $(A,B) = (4,1)$ のときで

その確率は $\dfrac{4}{_6C_4} = \mathbf{\dfrac{4}{15}}$

2019 大阪医大(後)



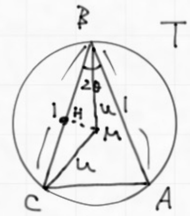
(1) Tの半径uは右図より $u=\sqrt{1-t^2}$

△ABCがとれるのはTの直径が1より大きく2より小さいときで、

$$1<2u=2\sqrt{1-t^2}<2$$

$$\frac{1}{4}<1-t^2<1$$

$$\mathbf{0<t<\frac{\sqrt{3}}{2}}$$



(2) Tの中心をM, ACの中点をHとする

MB = MC = u だから △MBCは二等辺三角形で

MH⊥BCとなる.

したがって△MBHは∠H = 90°の直角三角形であり. 三平方の定理より $MH=\sqrt{u^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$$\sin\theta=\frac{MH}{BM}=\frac{\sqrt{u^2-\frac{1}{4}}}{u}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{4u^2-1}}{2u}}$$

(3) $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{4u^2-1}{4u^2}}=\frac{1}{2u}$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin2\theta=\sin\theta\cos\theta=\frac{\sqrt{4u^2-1}}{2u}\times\frac{1}{2u}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{4u^2-1}}{4u^2}}$$

(4) OM = t, $u=\sqrt{1-t^2}\iff t=\sqrt{1-u^2}$, OABCの体積をVとして

$$V=\triangle ABC\times OM\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{4u^2-1}}{4u^2}\times\sqrt{1-u^2}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{(4u^2-1)(1-u^2)}}{12u^2}$$

ここで $u^2=X$ とおく ((1)より $0<X<1$)

$$V=\frac{1}{12}\times\frac{\sqrt{(4X-1)(1-X)}}{X}=\frac{1}{12}\sqrt{\left(4-\frac{1}{X}\right)\left(\frac{1}{X}-1\right)}=\frac{1}{12}\sqrt{-\frac{1}{X^2}+\frac{5}{X}-4}=\frac{1}{12}\sqrt{-\left(\frac{1}{X}-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}$$

$0<X<1$ より $\frac{1}{X}>1$ よってVは $\frac{1}{X}=\frac{5}{2}$ すなわち $X=\frac{2}{5}$. $u=\sqrt{\frac{2}{5}}$ のとき最大となり.

$V=\frac{1}{12}\times\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{1}{8}$ をとる

$u=\sqrt{\frac{2}{5}}$ のとき最大. 最大値 $\frac{1}{8}$

2019 大阪医大(後)

4

(1) $f_n'(x) = -n(1-x)^{n-1} - nx^n = -n\{x^n + (1-x)^n\} < 0 \quad (\because x>0,\ 1-x > \frac{1}{2} > 0)$

よって $f_n(x)$ は $0<x<\frac{1}{2}$ において単調に減少する.

また $f_n(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^n - (\frac{1}{2})^n = 0$ だから. $f_n(x) > f_n(\frac{1}{2}) = 0$ $\quad\therefore$ $0<x<\frac{1}{2}$において $f_n(x)>0$ が成り立つ.

(2) $f_n(x) - f_{n+1}(x) = (1-x)^n - x^n - (1-x)^{n+1} + x^{n+1}$

$= (1-x)^n x - x^n(1-x) = (1-x)x\{(1-x)^{n-1} - x^{n-1}\}$

$= (1-x)x f_{n-1}(x) > 0$ $\quad$ ($\because$ $n \geqq 2$のとき. (1)より $f_{n-1}(x)>0$, $1-x>0$. $x>0$)

よって $n\geqq 2$ のとき. $0<x<\frac{1}{2}$において $f_n(x) > f_{n+1}(x)$ が成り立つ.

(3) $a_n = \int_0^1 (1-x)^n \cos\pi x\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)^n \cos\pi x\,dx + \underline{\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^n \cos\pi x\,dx}$

ここで ～～ 部について $1-x=t$とおくと.

x	$\frac{1}{2} \to 1$
t	$\frac{1}{2} \to 0$

, $\frac{dt}{dx} = -1$ だから.

$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^n \cos\pi x\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^0 t^n \cos\pi(1-t)(-dt) = \int_0^{\frac{1}{2}} -t^n \cos\pi t\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} -x^n\cos\pi x\,dx$

よって $a_n = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)^n \cos\pi x\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} -x^n \cos\pi x\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \{(1-x)^n - x^n\}\cos\pi x\,dx$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)\cos\pi x\,dx$

$a_n - a_{n+1} = \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)\cos\pi x\,dx - \int_0^{\frac{1}{2}} f_{n+1}(x)\cos\pi x\,dx$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} (f_n(x) - f_{n+1}(x))\cos\pi x\,dx$

- $n\geqq 2$のとき

$0<x<\frac{1}{2}$ において (2)より $f_n(x) - f_{n+1}(x) > 0$

また. $0<x<\frac{1}{2}$ のとき $0<\pi x<\frac{\pi}{2}$ だから $0<\cos\pi x<1$

である. よって 上式の被積分関数は $0<x<\frac{1}{2}$において常に正であり. $a_n - a_{n+1} > 0$

- $n=1$ のとき

$f_1(x) - f_2(x) = 1-x-x-(1-x)^2+x^2 = 1-2x-1+2x-x^2+x^2 = 0$.

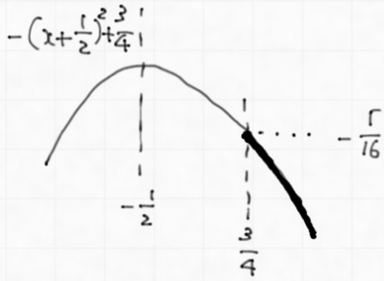
$\therefore\ a_1 - a_2 = 0$

以上より. $\begin{cases} n=1\text{のとき} & a_1 = a_2 \\ n\geqq 2 \quad " & a_{n+1} < a_n \end{cases}$

2019 大阪医大(後)

5

(1) $\dfrac{\frac{1}{2}+x}{1+x^2}=x \iff \frac{1}{2}+x=x+x^3 \iff x=2^{-\frac{1}{3}}$



(2) $0<f(x)-f(y)$ を示す.

$$f'(x)=\frac{1+x^2-2x(\frac{1}{2}+x)}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x-x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{-(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}{(1+x^2)^2}$$

$x\geqq\frac{3}{4}$ のとき. $-(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\leqq 1-\frac{3}{4}-(\frac{3}{4})^2=-\frac{5}{16}<0$

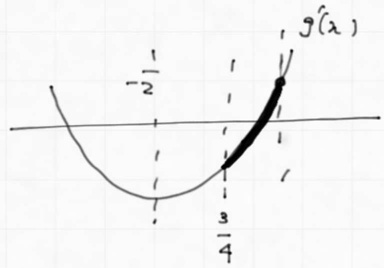
よって $x\geqq\frac{3}{4}$ において $f'(x)$ は常に負であり. $f(x)$ は単調に減少する.

よって $x<y$ のとき. $f(x)>f(y)$ であり. $f(x)-f(y)>0$

次に $f(x)-f(y)<\frac{1}{2}(y-x)$ を示す.

$$f''(x)=\frac{2x^3+3x^2-6x+1}{(1+x^2)^3}$$

上の式の分子を $g(x)$ とおく $(g(x)=2x^3+3x^2-6x+1)$



$g'(x)=6x^2+6x-6=6(x^2+x-1)=6(x+\frac{1}{2})^2-\frac{15}{2}$

よって $\frac{3}{4}\leqq x\leqq 1$ において $g'(x)$ は

$$g'(\tfrac{3}{4})=-\frac{57}{8}\leqq g'(x)\leqq g'(1)=6$$

であり. $\frac{3}{4}<x<1$ の範囲で $g'(x)=0$ となる x を1つもつ. (これを α とする)

$g(x)$ の増減は右のようになる

x	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	α	$\cdots$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗	0

また. $g(\frac{3}{4})=-\frac{205}{128}$, $g(1)=0$ なので.

$\frac{3}{4}\leqq x\leqq 1$ において $g(x)\leqq 0$ すなわち $f''(x)\leqq 0$ となる.

よって $f'(x)$ は $\frac{3}{4}\leqq x\leqq 1$ において単調に減少する.

$\frac{3}{4}\leqq x<y\leqq 1$ のとき $[x, y]$ において平均値の定理より

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(c), \qquad x<c<y$$

を満たす c が少なくとも1つ存在する. また $f'(x)$ は単調に減少するので.

$$f'(c)>f'(y)\geqq f'(1)=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(c)>-\frac{1}{4} \iff f(x)-f(y)<\frac{1}{4}(y-x)<\frac{1}{2}(y-x)$$

証明終

(3) (i) $n=1$ のとき. $x_1=1$ だから 不等式は成立している.

(ii) $n=k$ のとき $\frac{3}{4} \leqq x_k \leqq 1$ が成り立つと仮定する.

このとき. $x_{k+1}=f(x_k)$ であり. $f(x)$ は $\frac{3}{4} \leqq x \leqq 1$ で単調に減少するので.

$$f\left(\frac{3}{4}\right) \geqq f(x_k) \geqq f(1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{4} \leqq x_{k+1} \leqq \frac{20}{27} < 1$$

よって $n=k$ のときに不等式が成り立てば $n=k+1$ のときも成り立つ.

(i)(ii) より. 数学的帰納法により不等式は全てのnについて成立している.

(4) $2^{-\frac{1}{3}}=\alpha$ と表す.

$$|x_n-\alpha| \geqq 0,$$

$$\begin{aligned} |x_n-\alpha| &= |f(x_{n-1})-f(\alpha)| \\ &< \frac{1}{2}|x_{n-1}-\alpha| \qquad (\because (2)) \\ &= \frac{1}{2}|f(x_{n-2})-f(\alpha)| \\ &< \left(\frac{1}{2}\right)^2|x_{n-2}-\alpha| \\ &< \cdots < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|x_1-\alpha| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(1-2^{-\frac{1}{3}}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad 0 \leqq |x_n-\alpha| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(1-2^{-\frac{1}{3}}\right)$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(1-2^{-\frac{1}{3}}\right)=0$ だから はさみうちの原理より. $\lim_{n\to\infty}|x_n-\alpha|=0$.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha = 2^{-\frac{1}{3}}$$