2017 大阪医大(後)

1 (1) CとLは接しているので Cの中心(a,b)とLとの距離は半径(rとする)に等しい.

$$r=\frac{|a-b-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} \qquad \therefore r^2=\frac{1}{2}(a-b-1)^2$$

(2) HのPにおける法線は $y'=2x$ だから $y=\frac{-1}{2(-\frac{1}{2})}(x+\frac{1}{2})+\frac{1}{4}$ $\quad\therefore y=x+\frac{3}{4}$

(a,b)はこの上にあるので $b=a+\frac{3}{4}$ …①

(a,b)とPとの距離は半径に等しい

$$(a+\frac{1}{2})^2+(b-\frac{1}{4})^2=r^2$$

(1)の結果を代入.

$$(a+\frac{1}{2})^2+(b-\frac{1}{4})^2=\frac{1}{2}(a-b-1)^2$$

ここに①を代入

$$(a+\frac{1}{2})^2+(a+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}(\cancel{a}-\cancel{a}-\frac{7}{4})^2$$

$$2a^2+2a+\frac{1}{2}=\frac{49}{32}$$

$$64a^2+64a-33=0$$

$$(8a+11)(8a-3)=0$$

$$a=-\frac{11}{8},\ \frac{3}{8}$$

$a=-\frac{11}{8}$のとき $b=-\frac{11}{8}+\frac{3}{4}=-\frac{5}{8}$, $r=\frac{|-\frac{11}{8}+\frac{5}{8}-1|}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{8}$ $\qquad (x+\frac{11}{8})^2+(y+\frac{5}{8})^2=\frac{49}{32}$

$a=\frac{3}{8}$のとき $b=\frac{3}{8}+\frac{3}{4}=\frac{9}{8}$ $\quad r=\frac{|\frac{3}{8}-\frac{9}{8}-1|}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{8}$ $\qquad (x-\frac{3}{8})^2+(y-\frac{9}{8})^2=\frac{49}{32}$

$$\therefore\quad \boldsymbol{(x+\frac{11}{8})^2+(y+\frac{5}{8})^2=\frac{49}{32}\ ,\quad (x-\frac{3}{8})^2+(y-\frac{9}{8})^2=\frac{49}{32}}$$

2017 大阪医大（後）

2 (1) $\int_c^d f^{-1}(x)dx$ について　$f^{-1}(x)=u$ とおくと　$x=f(u)$ が成り立つので．$\frac{dx}{du}=f'(u)$

また $f(x)$ は逆関数をもつことから

$f^{-1}(c)=u$ を満たす u は　$c=f(u)=f(a)$　$\therefore u=a$.

同様に $f^{-1}(d)=u$ を満たす u は $u=b$

以上より

$$\int_c^d f^{-1}(x)dx=\int_c^d u\,dx=\int_a^b uf'(u)\,du=\Big[uf(u)\Big]_a^b-\int_a^b f(u)\,du$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx+\int_c^d f^{-1}(x)\,dx=\Big[uf(u)\Big]_a^b=bf(b)-af(a)=bd-ac$$ 証明終

(2) $g(e)=\frac{1}{e\log e}=\frac{1}{e}$，$g(e^2)=\frac{1}{e^2\times 2}=\frac{1}{2e^2}$

(1)より　$\int_{\frac{1}{2e^2}}^{\frac{1}{e}} g^{-1}(x)\,dx+\int_{e^2}^{e} g(x)\,dx=e\cdot\frac{1}{e}-e^2\cdot\frac{1}{2e^2}=\frac{1}{2}$

$$\int_{\frac{1}{2e^2}}^{\frac{1}{e}} g^{-1}(x)dx=\frac{1}{2}-\int_{e^2}^{e}\frac{1}{x\log x}dx=\frac{1}{2}-\int_{e^2}^{e}\frac{1}{\log x}(\log x)'dx$$

$$=\frac{1}{2}-\Big[\log(\log x)\Big]_{e^2}^{e}=\frac{1}{2}-\log 1+\log 2=\boldsymbol{\frac{1}{2}+\log 2}$$

2017大阪医大(後)

3 $g(x)=e^x,\ f(x)=g(g(x))=e^{e^x}$

(1) $f^{(1)}(x)=g'(g(x))\times g'(x)=e^{e^x}\cdot e^x=\boldsymbol{e^{e^x+x}}$

$f^{(2)}(x)=e^{e^x+x}(e^x+x)'=\boldsymbol{(e^x+1)e^{e^x+x}}$

(2) 数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$ のとき

$f^{(1)}(x)=e^x\cdot e^{e^x}=e^x\cdot f(x)$ 　したがって $P_1(t)=t$ とすれば関係式を満たしている。

(ii) $n=k$ のとき

$f^{(k)}(x)=P_k(e^x)f(x)$ を満たす多項式 $P_k(t)$ が存在すると仮定する

このとき

$$f^{(k+1)}(x)=P_k'(e^x)e^xf(x)+P_k(e^x)f^{(1)}(x)$$

$$=P_k'(e^x)e^xf(x)+P_k(e^x)e^xf(x)$$

$$=\{P_k'(e^x)e^x+P_k(e^x)e^x\}f(x)$$

よって $P_{k+1}(t)=P_k'(t)\cdot t+P_k(t)\cdot t$ とすれば関係式は $n=k+1$ でも成り立つ。

(i)(ii)より 数学的帰納法により題意の $P_n(t)$ は n の値にかかわらず存在する。

(3) (2)より $P_{n+1}(t)=P_n'(t)t+P_n(t)\cdot t$

$P_n(t)$ の3次以上の多項式を $Q_n(t)$ と表すと $P_n(t)=Q_n(t)+b_nt^2+a_nt$ となる。

これを上の式に代入

$$Q_{n+1}(t)+b_{n+1}t^2+a_{n+1}t=(Q_n'(t)+2b_nt+a_n)t+(Q_n(t)+b_nt^2+a_nt)t$$

t の1次の項を比較して $a_{n+1}=a_n$

t の2次の項を比較して $b_{n+1}=2b_n+a_n$

$$\therefore\ \boldsymbol{\begin{cases}a_{n+1}=a_n\\ b_{n+1}=2b_n+a_n\end{cases}}$$

(4) $n=2$ のとき。$f^{(2)}(x)=(e^{2x}+e^x)e^{e^x}$ だから $P_2(t)=t^2+t$

よって $a_2=1$. $b_2=1$.

(3)より $a_n=a_2=1$. だから $b_{n+1}=2b_n+1 \Leftrightarrow b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

$\therefore\ b_n+1=(b_2+1)\times2^{n-2}=2^{n-1}$ 　$b_n=2^{n-1}-1$ $(n\geqq2)$

$\therefore\ \boldsymbol{a_n=1.\ \ b_n=2^{n-1}-1\ \ (n\geqq2)}$

2017 大阪医大(後)

4 (1) n個の箱に m種の玉を重複を許していれるので n^m

(2) n個の箱に区別のない玉をm個, 重複を許さずにいれることを考える.

(i) $n<m$ のとき.

玉の方が多いので 重複を許さずに玉をいれることはできない　0通り

(ii) $n \geqq m$ のとき.

重複なしに玉をいれると ${}_nC_m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ 通り.

番号の小さな箱にはいった玉から $A_1 A_2 \dots A_m$ とすれば条件を満たすので、上記の1通りにつき1つの配置が存在する.

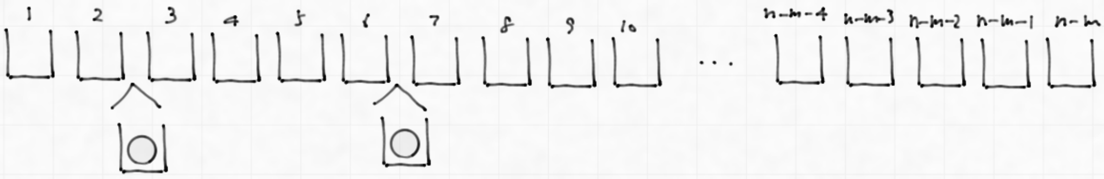
まとめると
$$\begin{cases} n<m \text{ のとき} & 0\text{通り} \\ n \geqq m \text{ のとき} & \dfrac{n!}{m!(n-m)!}\text{通り.} \end{cases}$$

(3) 隣りあう箱は選べないので. 玉の数m とそのすきまの空箱の数 $m-1$ は必要となる.

(i) $n<2m-1$のとき　配置は0.

(ii) $n \geqq 2m-1$ のとき.

$n-m$ 個の空箱を用意して、その $n-m+1$個のすきまに玉の入った箱を挟みこむ

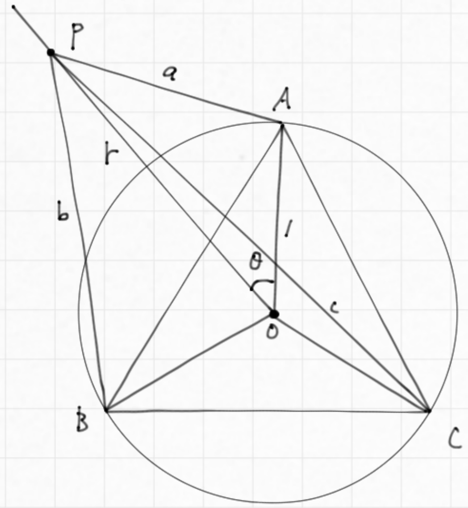


すきまのとり方は ${}_{n-m+1}C_m$ 通り $= \dfrac{(n-m+1)!}{m!(n-2m+1)!}$ 通り

番号の小さな箱にはいった玉から $A_1 A_2 \dots A_m$ とすれば条件を満たすので、上記の1通りにつき1つの配置が存在する.

まとめると
$$\begin{cases} n<2m-1 \text{ のとき} & 0\text{通り} \\ n \geqq 2m-1 \text{ のとき} & \dfrac{(n-m+1)!}{m!(n-2m+1)!}\text{通り} \end{cases}$$

2017 大阪医大（後）



5

(1) △OAPについて余弦定理より

$$a^2=1^2+r^2-2\cdot1\cdot r\cos\theta=1+r^2-2r\cos\theta$$

$\angle POB=\frac{2}{3}\pi-\theta$

△OBPについて余弦定理より

$$b^2=1^2+r^2-2\cdot1\cdot r\cos\left(\tfrac{2}{3}\pi-\theta\right)=1+r^2+r\cos\theta-\sqrt{3}r\sin\theta$$

$\angle POC=\frac{2}{3}\pi+\theta$

△OCPについて余弦定理より

$$c^2=1^2+r^2-2\cdot1\cdot r\cos\left(\tfrac{2}{3}\pi+\theta\right)=1+r^2+r\cos\theta+\sqrt{3}r\sin\theta$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a^2=1+r^2-2r\cos\theta,\ b^2=1+r^2+r\cos\theta-\sqrt{3}r\sin\theta,\ c^2=1+r^2+r\cos\theta+\sqrt{3}r\sin\theta}$$

(2)

(i) $a+b>c$ が成り立つとき

移項して　$a>c-b$

右上図より $c>b$ は明らかだから両辺2乗して

$$a^2>c^2-2bc+b^2$$

(1)の結果を代入

$$1+r^2-2r\cos\theta>2+2r^2+2r\cos\theta-2bc$$

$$2bc>1+r^2+4r\cos\theta$$

∴ $a+b>c$ が成り立つとき、$2bc>1+r^2+4r\cos\theta$ は成り立つ。

(ii) $2bc>1+r^2+4r\cos\theta$ が成り立つとき。

$a+b>c \iff a>c-b$ であり $c-b>0$ は図より明らかだから平方の差が正であることを示す

$$\begin{aligned}a^2-(c-b)^2&=a^2-c^2-b^2+2bc\\&=\cancel{1}+\cancel{r^2}-2r\cos\theta-\cancel{1}-\cancel{r^2}-r\cos\theta-\cancel{\sqrt{3}r\sin\theta}-1-r^2-r\cos\theta+\cancel{\sqrt{3}r\sin\theta}+2bc\\&=-4r\cos\theta-1-r^2+2bc\\&>-4r\cos\theta-1-r^2+1+r^2+4r\cos\theta=0\end{aligned}$$

よって $2bc>1+r^2+4r\cos\theta$ が成り立つとき　$a+b>c$ が成り立つ。

(i)(ii)より $a+b>c$ が成り立つための必要十分条件は $2bc>1+r^2+4r\cos\theta$ が成り立つことである。

(3) $a<c,\ b<c$ は明らかだから c が最も長く、$a+b>c$ が成り立てば a, b, c を3辺とする三角形は存在する。(2)よりその必要条件は $2bc>1+r^2+4r\cos\theta$ が成り立つことで。

$$\begin{aligned}(\text{左辺})^2-(\text{右辺})^2&=4b^2c^2-(r^2+1+4r\cos\theta)^2\\&=4(r^2+r\cos\theta+1-\sqrt{3}r\sin\theta)(r^2+r\cos\theta+1+\sqrt{3}r\sin\theta)-(r^2+1+4r\cos\theta)^2\\&=3r^4+3-12r^2+6r^2=3(r^2-1)^2\end{aligned}$$

$r\neq1$ のとき、これは必ず正の値をとるので、$r\neq1$ のとき $2bc>1+r^2+4r\cos\theta$ が成立する。

∴ $r\neq1$ のとき　a, b, c を三辺とする三角形が存在する。