2018 藤田医科(後)

1

(1) 接線は $\dfrac{4x}{32}+\dfrac{2y}{8}=1 \iff y=-\dfrac{1}{2}x+4$

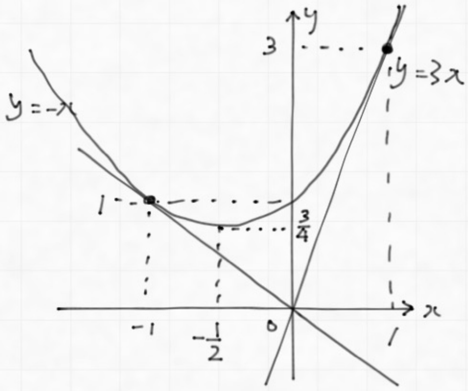
その傾きは $-\dfrac{1}{2}$ だから法線の傾きは 2　したがって法線は $y=2(x-4)+2 \iff y=2x-6$

(2) $C:\ y=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

C と $y=mx$ を連立　$x^2-mx+x+1=0$ …①

① が重解を持つとき，C と $y=mx$ は接する．判別式を D として

$D=(1-m)^2-4=m^2-2m-3=0$　　$m=3,-1$



C と $y=-x$ の接点は ① で $m=-1$ として $(x+1)^2=0$

$x=-1,\ y=1$

C と $y=3x$ の接点は $(x-1)^2=0$　$x=1,\ y=3$

面積 S は $S=\displaystyle\int_{-1}^{0} x^2+x+1-(-x)\,dx+\int_0^1 x^2+x+1-(3x)\,dx$

$=\displaystyle\int_{-1}^{0}(x+1)^2dx+\int_0^1(x-1)^2dx$

$=\left[\dfrac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0}+\left[\dfrac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

体積 V は $V=\displaystyle\int_{-1}^{1}\pi(x^2+x+1)^2dx-\dfrac{1}{3}\times1\times\pi\times1^2-\dfrac{1}{3}\times1\times\pi\times3^2$

$=2\pi\displaystyle\int_0^1 x^4+x^2+1+2x^2\,dx-\dfrac{1}{3}\pi-3\pi$

$=2\pi\left[\dfrac{1}{5}x^5+\dfrac{3}{4}x^4+x\right]_0^1-\dfrac{1}{3}\pi-3\pi=2\pi\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{4}+1\right)-\dfrac{1}{3}\pi-3\pi$

$=\dfrac{39}{10}\pi-\dfrac{1}{3}\pi-3\pi=\dfrac{1}{30}\pi(117-10-90)=\mathbf{\dfrac{17}{30}\pi}$

(3) $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}3\cdot2^{-3k}$ とおく

$S_n=3\cdot1+3\cdot2^{-3}+3\cdot2^{-6}+\cdots+3\cdot2^{-3n+3}+3\cdot2^{-3n}=3\times\dfrac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{8}}=\dfrac{24}{7}\left(1-\dfrac{1}{8^{n+1}}\right)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\mathbf{\dfrac{24}{7}}$

(4)

x	y	z	余り
○	○	○	

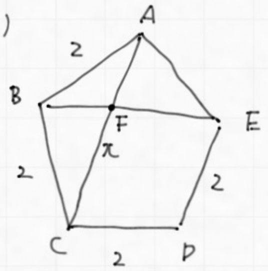
左の4つの箱に16個のボールを入れる入れ方を考える

(ボールに区別は無く，同じ箱に何個ボールを入れても良い．
また，入れる順番も区別しない)

x,y,z に1つずつ先に入れておき，残った13個のボールを箱にいれる

上記の入れ方1つ1つが条件と対応するので　${}_4H_{13}={}_{16}C_{13}={}_{16}C_3=\dfrac{16\cdot15\cdot14}{3\cdot2}=\mathbf{560}$

(5)



$AC = x$ とする（対称性から $BE = x$）

左図で $BC = CE$ $(\because \angle CBF = \angle CFB = 72^\circ)$

$\therefore AF = AC - CF = x - 2$

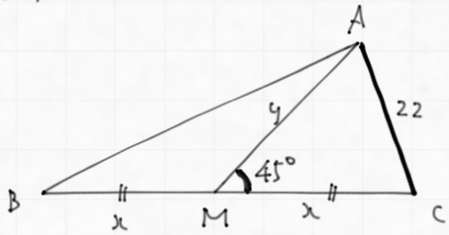
$\triangle BAC \backsim \triangle FAB$ より $AB : AC = AF : AB$

$2 : x = x - 2 : 2 \iff x^2 - 2x - 4 = 0$

$x = 1 \pm \sqrt{1+4} = 1 \pm \sqrt{5}$

$x > 0$ だから $x = 1 + \sqrt{5}$ $AC =$ **$1+\sqrt{5}$**

(6)



$\triangle AMC = \frac{1}{2}\triangle ABC = 120$

$MC = x$, $AM = y$ として

$\triangle AMC = \frac{1}{2} xy \sin 45^\circ = 120$ $xy = 240\sqrt{2}$

余弦定理 $22^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos 45^\circ$

$22^2 = x^2 + y^2 - 480$

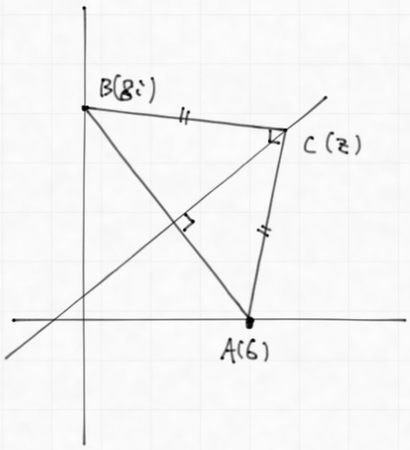
$x^2 + y^2 = 964.$

$AB^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 135^\circ = 964 - 2 \cdot 240\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= 1444$

$AB =$ **38**

(7)



C は B を A を中心に $-\frac{\pi}{4}$ 回転させて $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍した点に対応する

$z = (8i - 6)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right) + 6$

$= (8i - 6)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) + 6$

$= (4i - 3)(1 - i) + 6 = 4i + 4 - 3 + 3i + 6 =$ **$7i + 7$**

(8) A … $a_1, a_2 \cdots a_{15}$ $\sum_{k=1}^{15} a_k = 12 \times 15 = 180$

$\frac{1}{15}\sum_{k=1}^{15} a_k^2 - 12^2 = 30$ より $\sum_{k=1}^{15} a_k^2 = (30 + 144) \times 15 = 174 \times 15$

B … $b_1, b_2 \ldots b_{25}$ $\sum_{k=1}^{25} b_k = 20 \times 25 = 500$

$\frac{1}{25}\sum_{k=1}^{25} b_k^2 - 20^2 = 38$ $\sum_{k=1}^{25} b_k^2 = (38 + 400) \times 25 = 438 \times 25$

$\frac{1}{40}\left(\sum_{k=1}^{15} a_k + \sum_{k=1}^{25} b_k\right) = \frac{1}{40}(180 + 500) =$ **17**

$\frac{1}{40}\left(\sum_{k=1}^{15} a_k^2 + \sum_{k=1}^{25} b_k^2\right) - 17^2 = \frac{1}{\cancel{40}_{\cancel{8}\,4}}\left(\cancel{174}_{87} \times \cancel{15}^{3} + \cancel{438}_{219} \times \cancel{25}^{5}\right) - 289 = \frac{\cancel{1}}{\cancel{4}} \times \cancel{1376}^{339} - 289 =$ **50**

(9) 同色なのは $\dfrac{{}_5C_2 + {}_4C_2 + {}_3C_2}{{}_{12}C_2} = \dfrac{10+6+3}{6\dfrac{\cancel{12}\cdot 11}{\cancel{2}}} = \dfrac{19}{6\cdot 11} = \dfrac{19}{66}$

その余事象

$1 - \dfrac{19}{66} = \mathbf{\dfrac{47}{66}}$

(10) $f(x) = \dfrac{d}{dx}\left\{ x\int_0^x \sin t\, dt - \int_0^x t\sin t\, dt \right\}$

$= 1\cdot\int_0^x \sin t\, dt + \cancel{x\sin x} - \cancel{x\sin x}$

$= -\cos x + 1$

$\therefore\ f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} + 1 = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

(11) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 7 \iff e^x + e^{-x} = 14 \iff e^{2x} - 14e^x + 1 = 0 \iff e^x = 7 \pm \sqrt{49-1} = 7 \pm 4\sqrt{3}$

$x = \log(7 \pm 4\sqrt{3})$

$\log(7+4\sqrt{3}) = \alpha$ とすると $\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}} = \dfrac{7-4\sqrt{3}}{49-48} = 7-4\sqrt{3}$ だから

$\log(7-4\sqrt{3}) = \log(7+4\sqrt{3})^{-1} = -\alpha$

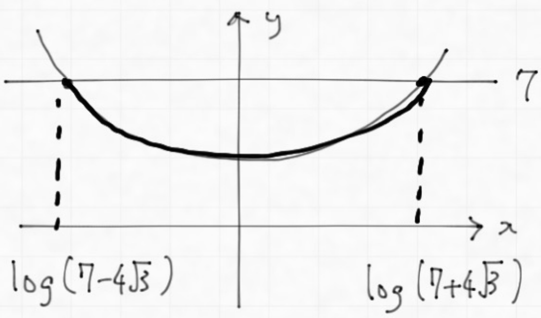
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

以上より　もとめる長さをLとして

$L = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{1 + \dfrac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}}\, dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}\, dx$

$= \int_{-\alpha}^{\alpha} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx = \dfrac{1}{2}\Big[e^x - e^{-x}\Big]_{-\alpha}^{\alpha} = \dfrac{1}{2}\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha} - e^{-\alpha} + e^{\alpha}\right)$

$= e^{\alpha} - e^{-\alpha} = 7 + 4\sqrt{3} - (7 - 4\sqrt{3}) = \mathbf{8\sqrt{3}}$



2018 藤田医科（後）

2 (1) lは点Aを通って$\overrightarrow{AB}$と平行な直線だから.

$$l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad(t\text{は任意の実数})$$

$$PQ^2=(t+1-k)^2+(t+2)^2+(t+3)^2=t^2+1+k^2+2t-2kt-2k+t^2+4t+4+t^2+6t+9$$

$$=3t^2+12t-2kt+k^2-2k+14$$

$$=3\left(t+2-\frac{k}{3}\right)^2-3\left(2-\frac{k}{3}\right)^2+k^2-2k+14$$

$$=3\left(t+2-\frac{k}{3}\right)^2+\frac{2}{3}k^2+2k+2$$

$$=3\left(t+2-\frac{k}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\left(k+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

これは $k=-\frac{3}{2}$, かつ $t+2-\frac{k}{3}=0$ のとき最小となる（このとき $PQ^2=\frac{1}{2}$）

$$k=-\frac{3}{2}\quad,\ t=-\frac{5}{2}$$

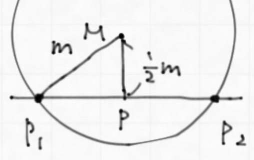
このとき Pは $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\frac{5}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ Qは $\left(-\frac{3}{2},0,0\right)$

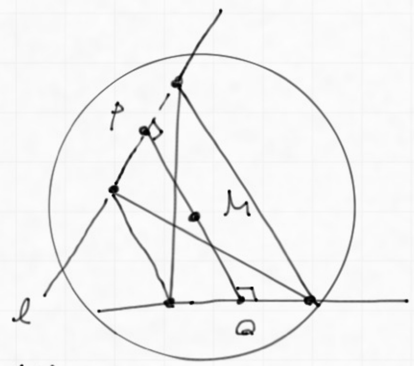
最小値 $m=PQ=\mathbf{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ $\mathbf{P\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}$ $\mathbf{Q\left(-\frac{3}{2},0,0\right)}$

(2) lと球の交点をP_1, P_2とする

$PM=\frac{1}{2}m$, $MP_1=MP_2=m$ だから

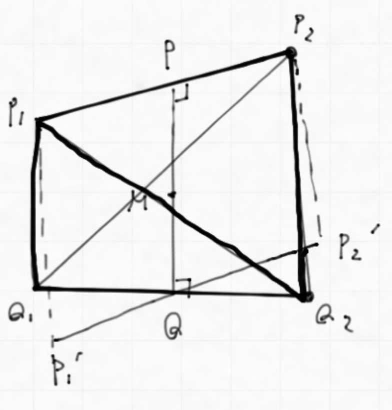
$$P_1P=\sqrt{m^2-\left(\frac{1}{2}m\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}m=P_2P$$





同様に x軸と球の交点をQ_1, Q_2として

$$Q_1Q=\frac{\sqrt{3}}{2}m=Q_2Q$$



$$\overrightarrow{P_1P_2}=\frac{\sqrt{3}}{2}m\times2\times\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

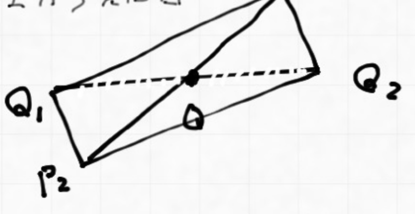
$$\overrightarrow{Q_1Q_2}=\frac{\sqrt{3}}{2}m\times2\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{P_1P_2}$と$\overrightarrow{Q_1Q_2}$の2つのベクトルの作る三角形の面積は

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{P_1P_2}|^2|\overrightarrow{Q_1Q_2}|^2-(\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{Q_1Q_2})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

真上から見た図



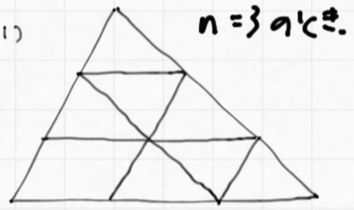
したがって体積は

$$V=\frac{\sqrt{6}}{4}\times PQ\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{6}}{12}\times m=\frac{\sqrt{6}}{12}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{12}}$$

2018 藤田医科(後)

3

(1)



3辺をn等分した点を左のように結ぶと、
元の三角形と相似なn^2個の三角形に分割できる

(2) $(2n)^2=4n^2$, $(2n-1)^2=4(n^2-n)+1$ だから 平方数を4で割った余りは 0または1

2018を4で割った余りは2なので、aおよびbはいずれも奇数.

$1^2=1$, $3^2=9$, $5^2=25$, $7^2=49$, $9^2=81$, $11^2=121$, $13^2=169$, $15^2=225$

$17^2=289$, $19^2=361$, $21^2=441$, $23^2=529$, $25^2=625$, $27^2=729$, $29^2=841$

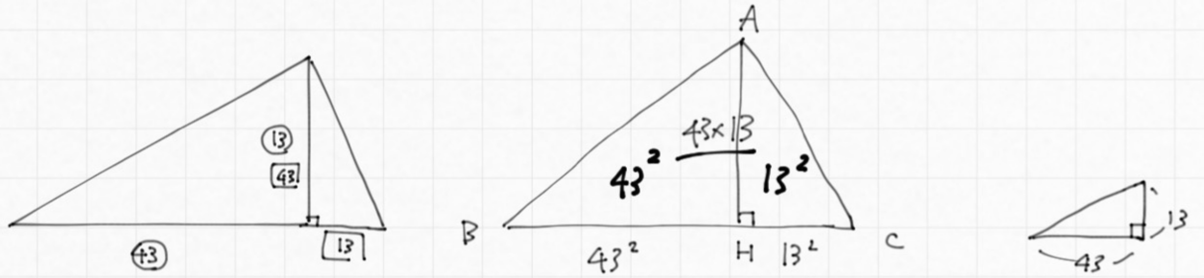
$31^2=961$, $33^2=1089$, $35^2=1225$, $37^2=1369$, $39^2=1521$, $41^2=1681$, $43^2=1849$

$45^2=2025$

$a=43$, $b=13$ とすれば $43^2+13^2=1849+169=2018$.

よって $a^2+b^2=2018$を満たす正の整数 a,bが存在する. $\left((a,b)=(43,13),(13,43)\right)$

(3)



左上の図のような比を持つ三角形を考える

$BH=43^2$, $AH=43\times13$, $CH=13^2$ とすると △ABHを(1)のように43^2個に分割でき、

△ACHを13^2個に分割できる. またこれらは全て 右上端の大きさの直角三角形となっている.

よって題意を満たす三角形は存在する.