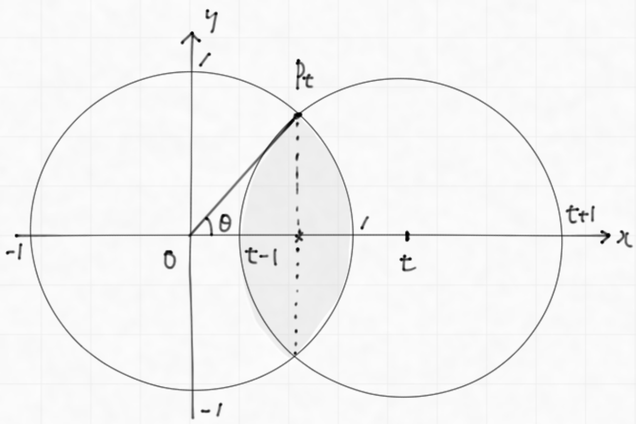
2020 大阪市立大

1



(1) D_0とD_tの共通部分のうち $x \geqq \cos\theta$ の範囲にある右側半分の面積は扇形の面積から三角形の面積を除いたものなので、

$$\pi \times 1^2 \times \frac{2\theta}{2\pi} - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 2\theta$$

$$= \theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

対称性より、左半分の面積も右半分と同じ。

$$S(t) = 2\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) = \mathbf{2\theta - \sin 2\theta}$$

(2) $x = \cos\theta$ について左右対称なので

$$t = \cos\theta \times 2 = \mathbf{2\cos\theta}$$

(3) $\displaystyle\int_0^2 S(t)\,dt = \int_0^2 2\theta - \sin 2\theta\,dt = (*)$

ここで(2)より $t = 2\cos\theta$ であり、この式の両辺を θ で微分すると

$\dfrac{dt}{d\theta} = -2\sin\theta$　　また　tが $0 \to 2$ へと変化するとき　θは $\frac{\pi}{2} \to 0$ へと変化する

$$(*) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (2\theta - \sin 2\theta)(-2\sin\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(2\theta - 2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\sin\theta\,d\theta - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= 4\left[-\theta\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta(\sin\theta)'\,d\theta$$

$$= 0 - 0 + 4\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 4\left[\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 4 - 0 - \frac{4}{3} = \mathbf{\frac{8}{3}}$$

2020 大阪市立

2

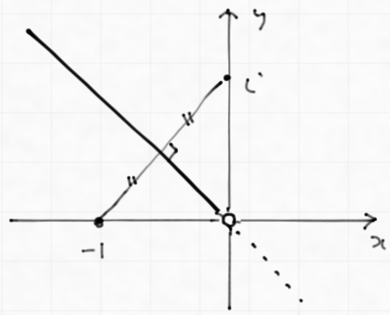
(1) $w = z + \dfrac{1}{z} = r(\cos\theta + i\sin\theta) + \dfrac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

$= \left(r + \dfrac{1}{r}\right)\cos\theta + \left(r - \dfrac{1}{r}\right)\sin\theta \cdot i$

$= u + vi$

だから　$u = \left(r + \dfrac{1}{r}\right)\cos\theta$,　$v = \left(r - \dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$

(2) zについて $|z+1| = |z-i|$ より、zは点-1と点iの2点からの距離が等しいので
-1とiを結ぶ線分の垂直二等分線上の点であることが分かる。



そのうち、zの偏角が $0 < \theta < \pi$ を満たし、$z \neq 0$ も満たすものは右のグラフのように第2象限にあるものに限られる。したがって $\theta = \frac{3}{4}\pi$ であり、

$u = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)$ …①　　$v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(r - \dfrac{1}{r}\right)$ …②

①−②　$u - v = -\sqrt{2}\,r$ より $r = \dfrac{v-u}{\sqrt{2}}$ を①に代入

$u = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{v-u}{\sqrt{2}} - \cancel{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} \times \dfrac{\cancel{\sqrt{2}}}{v-u}$

$\dfrac{1}{2}u + \dfrac{1}{2}v = \dfrac{1}{u-v}$

$u^2 - v^2 = 2$ …③

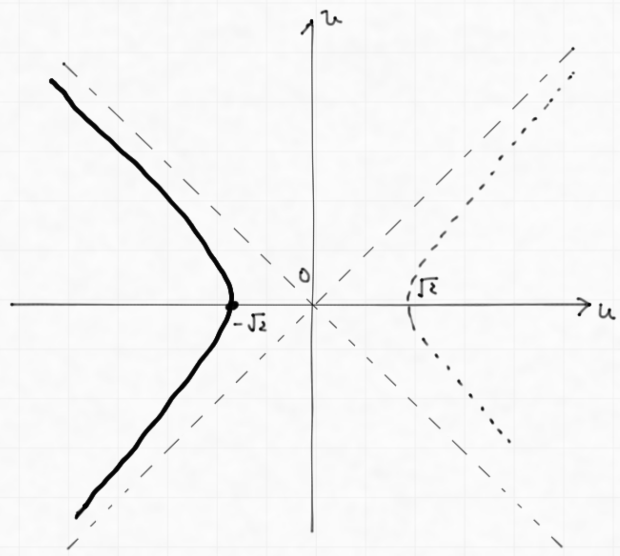
$\displaystyle\lim_{r\to\infty} u = \lim_{r\to\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}r - \frac{1}{\sqrt{2}r}\right) = -\infty$　　$r + \dfrac{1}{r} \geqq 2\sqrt{r \times \dfrac{1}{r}} = 2$ より　$u \leqq -\sqrt{2}$

(等号は $r = 1$)

$\displaystyle\lim_{r\to\infty} v = \lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}r - \frac{1}{\sqrt{2}r}\right) = +\infty$

$\displaystyle\lim_{r\to+0} v = \lim_{r\to+0}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}r - \frac{1}{\sqrt{2}r}\right) = -\infty$

③は双曲線でその漸近線は　$v = \pm u$



2020 大阪市立

3

(1) $\overrightarrow{BC}=(4,-2,-1)$

$\vec{n}=(a,b,c)$ とおくと　　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ より　　$a+b-c=0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ より　　$4a-2b-c=0$

連立して　$a=b,\quad c=2a$　　$\therefore a:b:c=1:1:2$

$|\vec{n}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=1$ を満たすので　　$a^2+a^2+4a^2=1$　　$a=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$

$\therefore \vec{n}=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{6}},\ \pm\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$　**複号同順**

(2) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}=(s,s,-s)$

$$\overrightarrow{OQ}=t\overrightarrow{OC}+(1-t)\overrightarrow{OB}=t\begin{pmatrix}4k+4\\-2k\\-k\end{pmatrix}+(1-t)\begin{pmatrix}4k\\-2k+2\\-k+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4t+4k\\-2t-2k+2\\-t-k+1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}4t+4k\\-2t-2k+2\\-t-k+1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}s\\s\\-s\end{pmatrix}=\boldsymbol{\begin{pmatrix}4t+4k-s\\-2t-2k+2-s\\-t-k+1+s\end{pmatrix}}$$

(3) $\overrightarrow{PQ}$ が $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{BC}$ の両方に垂直なとき、$\overrightarrow{PQ}$ は $\vec{n}$ と平行だから

$$\begin{pmatrix}4t+4k-s\\-2t-2k+2-s\\-t-k+1+s\end{pmatrix}=u\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

を満たす実数 u が存在すればよい。

$$\begin{cases}4t+4k-s=u & \cdots①\\ 2t+2k+s-2=-u & \cdots②\\ t+k-s-1=-2u & \cdots③\end{cases}$$

↗

② − ③ × 2　　$3s=3u$　　…④

① − ② × 2　　$-3s+4=3u$　…⑤

④ − ⑤　　$6s-4=0$　　$s=\frac{2}{3},\ u=\frac{2}{3}$

このとき ③ は　　$t+k=\frac{1}{3}$

以上より

P$\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$　Q$\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$

このような P, Q が存在するための条件は

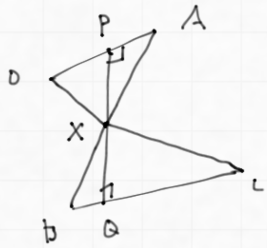
$0<s<1,\ 0<t<1$ が成り立つことで　$t=\frac{1}{3}-k$

だから

$0<\frac{1}{3}-k<1 \iff \boldsymbol{-\frac{2}{3}<k<\frac{1}{3}}$

(4) $\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$　　$|\overrightarrow{PQ}|=\frac{2}{3}\sqrt{6}$

$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{3},\quad |\overrightarrow{BC}|=\sqrt{4^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{21}$



$\triangle XOA$ と $\triangle XBC$ の面積が等しいとき

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{PX}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{XQ}|$$

$$|\overrightarrow{PX}|:|\overrightarrow{XQ}|=\sqrt{21}:\sqrt{3}=\sqrt{7}:1$$

$$\therefore |\overrightarrow{PX}|=|\overrightarrow{PQ}|\times\frac{\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}=\frac{2}{3}\sqrt{6}\times\frac{7-\sqrt{7}}{7-1}=\frac{2\sqrt{6}(7-\sqrt{7})}{18}=\frac{\sqrt{6}(7-\sqrt{7})}{9}$$

$$\triangle XOA=\frac{1}{2}\cancel{\sqrt{3}}\cdot\frac{\overset{\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{6}}}(7-\sqrt{7})}{\underset{3}{\cancel{9}}}=\boldsymbol{\frac{7\sqrt{2}-\sqrt{14}}{6}}$$

2020 大阪市立

4

(1) $I_n(s) = \int_0^1 x^{n-s}(1-x)^s dx$

$= \left[x^{n-s} \frac{1}{s+1}(1-x)^{s+1} \times (-1) \right]_0^1 - \int_0^1 (n-s)x^{n-s-1} \times \frac{1}{s+1}(1-x)^{s+1}(-1)\, dx$

$= 0 - 0 + \frac{n-s}{s+1}\int_0^1 x^{n-(s+1)}(1-x)^{s+1} dx = \frac{n-s}{s+1} I_n(s+1)$

(2) $I_n(s) = \frac{n-s}{s+1} I_n(s+1)$

$= \frac{n-s}{s+1} \times \frac{n-s-1}{s+2} \times I_n(s+2)$

$= \frac{n-s}{s+1} \times \frac{n-s-1}{s+2} \times \frac{n-s-2}{s+3} \times \cdots \times \frac{2}{n-1} \times I_n(n-1)$

ここで $I_n(n-1) = \int_0^1 x(1-x)^{n-1} dx$

$= \left[x \frac{1}{n}(1-x)^n \cdot (-1) \right]_0^1 + \int_0^1 1 \cdot \frac{1}{n}(1-x)^n dx = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1} \times (-1) \right]_0^1$

$= \frac{1}{n(n+1)}$

だから

$I_n(s) = \frac{n-s}{s+1} \times \frac{n-s-1}{s+2} \times \frac{n-s-2}{s+3} \times \cdots \times \frac{2}{n-1} \times \frac{1}{n} \times \frac{1}{n+1}$

$= \frac{(n-s)!\, s!}{(n+1)!}$

(3) (2) より $I_n(s) = \frac{1}{{}_nC_s} \times \frac{1}{n+1}$ だから $\frac{1}{{}_nC_s} = (n+1) I_n(s)$ …①

また、 $I_n(s) = \int_0^1 x^{n-s}(1-x)^s dx$

$= \int_0^1 {}_sC_0 x^{n-s} + {}_sC_1(-1)^1 x^{n-s+1} + {}_sC_2(-1)^2 x^{n-s+2} + \cdots + {}_sC_s(-1)^s x^n dx$

$= \sum_{k=0}^{s} \int_0^1 {}_sC_k (-1)^k x^{n-s+k} dx$

$= \sum_{k=0}^{s} \left\{ {}_sC_k (-1)^k \left[\frac{1}{n-s+k+1} x^{n-s+k+1} \right]_0^1 \right\}$

$= \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \frac{1}{n-s+k+1} {}_sC_k$ …②

①② より $\frac{1}{{}_nC_s} = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \frac{n+1}{n-s+k+1} {}_sC_k$

証明終.