2020愛知医大

1 1) $\log_{10}x = X$ として.

$$y = X^2 - 4X + 6 = (X-2)^2 + 2$$

$X=2$のとき最小値 **2** （このとき. $x = 10^2 = 100$）

2) 平均は $a+3$ だから

$$s^2 = \frac{(a-a-3)^2 + (a+2-a-3)^2 + (a+4-a-3)^2 + (a+6-a-3)^2}{4}$$

$$= \frac{1}{4}(9+1+1+9) = \mathbf{5}$$

3) $2-2\sqrt{3}i = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^2\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$

平方根を $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とすると. $\left(\begin{array}{c}0 \leqq \theta < 2\pi \\ とする\end{array}\right)$ $r^2 = 2^2$, $2\theta = \frac{5}{3}\pi + 2\pi \cdot n$ （nは整数）

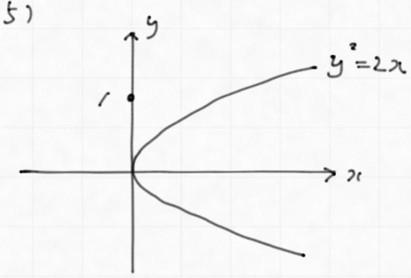
$r=2$, $\theta = \frac{5}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$

$2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$, $2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right) = \mathbf{-\sqrt{3}+i}$ **,** $\mathbf{\sqrt{3}-i}$

4) 多項定理の公式より.

a^3b^3cd の係数は $\frac{8!}{3!3!1!1!} = \frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}\cdot5\cdot4}{\cancel{3\cdot2}} = \mathbf{1120}$

5)



$x=0$は $y^2=2x$ に接する.

$(0,1)$ を通って傾きmの直線は $y = mx+1$

これと $y^2=2x$ を連立　$m \neq 0$は明らかなので

$$my^2 = 2(y-1)$$

$$my^2 - 2y + 2 = 0$$

接するとき、上の式は重解をもつので、判別式をDとして

$$D/4 = 1^2 - m\cdot2 = 0 \qquad \therefore\ m = \frac{1}{2}$$

以上より　$\mathbf{x=0}$, $\mathbf{y=\frac{1}{2}x+1}$

6)

$f(x) = 2^x$ とおくと　$f'(x) = (\log 2)2^x$

$$f'(0) = (\log 2)2^0 = \lim_{x\to0}\frac{2^x - 2^0}{x-0}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{\sin 2x} = \lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x} \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sin 2x}{2x}} = f'(0) \times \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}\log 2}$$

$\frac{\sin 2x}{2x}$　$\frac{\log(x+1)}{x} \to 1$　$\frac{e^x-1}{x} \to 1$

7) 公比をrとする (r≠1は明らか)

条件より $-3 \times r^3 = 24$ より $r = -2$

一般項 a_n は $a_n = -3(-2)^{n-1}$

$$S_n = \frac{-3(1-(-2)^n)}{1-(-2)} = -1+(-2)^n$$

nが偶数のとき $S_n > 0$ $S_4 = -1+16 = 15 < 100$ $S_6 = -1+64 = 63 < 100$, $S_8 = -1+256 > 100$

$n = 8$ のとき初めて和が100を超える.

8) $\int_0^{\pi} \sin^3 x\,dx = \int_0^{\pi} (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = \left[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\pi} = 1 - \frac{1}{3} - \left(-1+\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$

$-\int \cos^2 x \sin x\,dx = \int \cos^2 x (\cos x)' dx = \frac{1}{3}\cos^3 x + C$

3) 別解 平方根を $a+bi$ とする.

$(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 2 - 2\sqrt{3}i$

$a^2 - b^2 = 2$, $2ab = -2\sqrt{3}$

$b = -\frac{\sqrt{3}}{a}$ を代入 $a^2 - \frac{3}{a^2} = 2 \Leftrightarrow a^4 - 2a^2 - 3 = 0$

$a^2 = 3, -1$ $a^2 \geq 0$ だから $a^2 = 3$. $\therefore a = \pm\sqrt{3}$.

$b = -\sqrt{3} \times \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \mp 1$ $a+bi = \pm\sqrt{3} \mp i$

2020愛知医大

11 n人を集めたとき、n人全員がAB型でない確率は

$$(1-0.1)^n = 0.9^n$$

したがって少なくとも1人がAB型である確率は

$$1-0.9^n$$

これが99%を超えるとき

$$1-0.9^n > 0.99$$

$$\Leftrightarrow \quad 0.01 > 0.9^n$$

両辺の対数をとる

$$\log_{10}10^{-2} > \log_{10}\left(\frac{9}{10}\right)^n = n(2\log_{10}3-1) = n(2\times0.477-1) = -0.046n$$

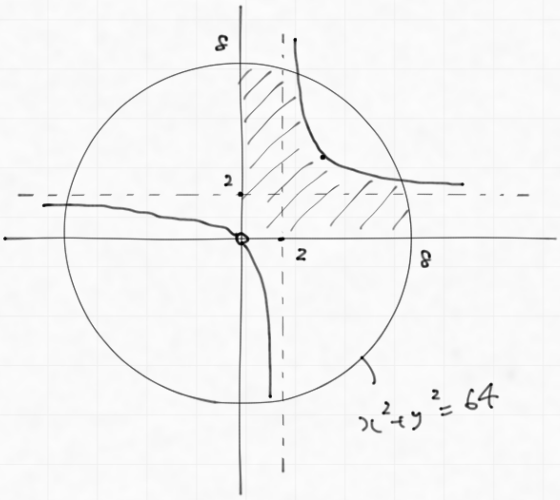
$$n > \frac{2}{0.046} = 43.478\cdots$$

44人以上集めればよい

2020 愛知医大

|1| $x>0, y>0$ だから。

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geqq \frac{1}{2} \iff 2x+2y \geqq xy \iff (x-2)(y-2) \leqq 4$ …①



$x=1$ のとき $y^2 \leqq 64-1=63$

$y=1, 2, \cdots 7$

$x=2$ のとき $y^2 \leqq 64-4=60$

$y=1, 2, \cdots 7$

$x=3$ のとき $y-2 \leqq 4 \iff y \leqq 6$

$y=1, 2, \cdots 6$

$x=4$ のとき $y-2 \leqq 2 \iff y \leqq 4$

$y=1, 2, 3, 4$

$x=5$ のとき $y-2 \leqq \frac{4}{3} \iff y \leqq 3$

$y=1, 2, 3$

$x=6$ のとき $y-2 \leqq 1 \iff y \leqq 3$

$y=1, 2, 3$

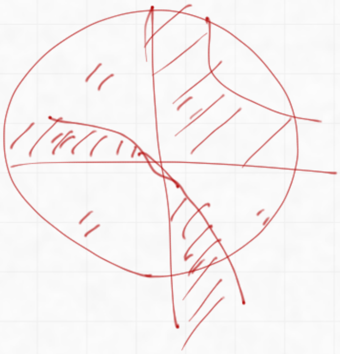
$x=7$ のとき $y-2 \leqq \frac{4}{5} \iff y \leqq 2$

かつ $y^2 \leqq 64-49=15$

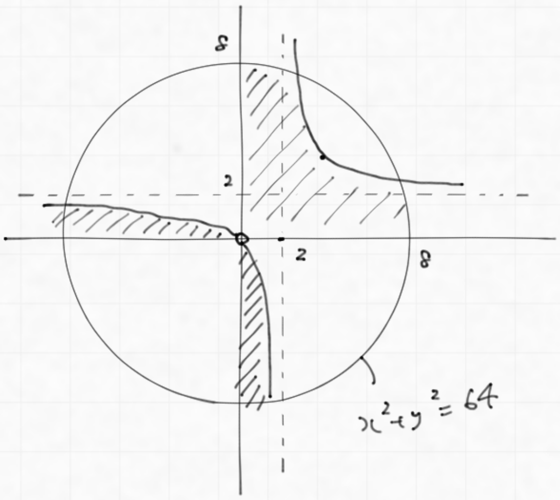
$y=1, 2$

$x=8$ のとき $y-2 \leqq \frac{4}{6}$ かつ $y^2 \leqq 64-64=0$

yは存在しない



以上より。 $7+7+6+4+3+3+2+0=$ **32通り**



$x<0$ かつ $y<0$ のとき $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<0$ なので

条件を満たす(x, y)は存在しない

$x<0$ かつ $y>0$ のとき $\frac{1}{y} \geqq \frac{1}{2}-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{2x}$

$y \leqq \frac{2x}{x-1}$

$x>0$ かつ $y<0$ のとき $x \leqq \frac{2y}{y-1}$

$x>0$ かつ $y>0$ のとき (1)

以上より左の斜線中の格子点を考えればよい

$x=1$, $y<0$ のとき。 $\frac{1}{y} \geqq -\frac{1}{2} \iff 1 \leqq -\frac{1}{2}y$

$\iff -2 \geqq y$ $\therefore y=-2, -3, \cdots -7$ の6通り

$y=1$, $x<0$ のときも同様に6通り。

(1)と併せて。 $32+6+6=$ **44通り**

IV

1) $\overrightarrow{AB}=(-4,1,2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,-1,0)$

$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$の両方に垂直なベクトルを $\vec{n}=(a,b,c)$ とすると.

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-4a+b+2c=0,\quad \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-2a-b=0$$

以下

$$a:b:c=a:-2a:3a=1:-2:3$$

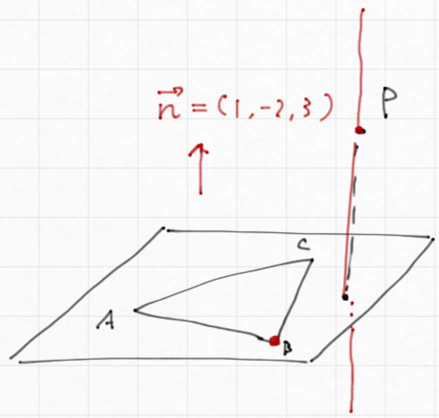
$\vec{n}=(1,-2,3)$ とする

αはBを通り, $\vec{n}$と垂直なので. $\alpha:\ (x-0)-2(y-1)+3(z-1)=0$

$$x-2y+3z-1=0$$

Pを通って$\vec{n}$を方向ベクトルにもつ直線は

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\quad(\text{tは任意の実数})$$



この直線とαの交点がTとなるので. 連立して

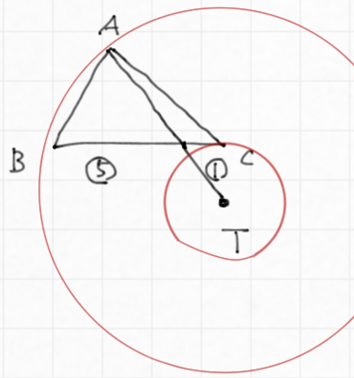
$$1+t-2(-2-2t)+3(1+3t)-1=0$$

$$1+t+4+4t+3+9t-1=0$$

$$t=-\frac{1}{2}$$

$\therefore\ \mathbf{T\left(\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2}\right)}$

2) $$\overrightarrow{AT}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{2}\\-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\-\frac{5}{4}\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}\right)$$



TからBCに下ろした垂線の足をHとして.

$$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+(1-s)\overrightarrow{AC},\quad \overrightarrow{TH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

$$(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AT})\cdot\overrightarrow{BC}=0 \iff \begin{pmatrix}-4s-2+2s+\frac{7}{2}\\ s-1+s+1\\ 2s+0-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}=0$$

$$-4s-4+7-4s-4s+1=0\qquad s=+\frac{1}{3}$$

HはBCを2:1に内分する点なので. △ABC内の点とTとの最短距離はTH

$$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{8}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{TH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AT}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6}\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{6}\end{pmatrix}\qquad |\overrightarrow{TH}|=\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{4}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{1}{6}\sqrt{25+16+1}=\frac{\sqrt{42}}{6}$$

$$|\overrightarrow{PH}|^2=|\overrightarrow{PT}|^2+|\overrightarrow{TH}|^2=\frac{1}{4}|\vec{n}|^2+\frac{42}{36}=\frac{1}{4}\times14+\frac{7}{6}=\frac{\cancel{56}^{\,14}}{\cancel{12}_{\,3}}\qquad\therefore\ |\overrightarrow{PH}|=\sqrt{\frac{14}{3}}=\frac{\sqrt{42}}{3}$$

また $$|\overrightarrow{PA}|^2=\left|\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}\right|^2=9+4+4=17$$

$$|\overrightarrow{PB}|^2=\left|\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}\right|^2=1+9=10\qquad PA>PB$$

よって

$$\mathbf{\frac{\sqrt{42}}{3}\leq r\leq\sqrt{17}}$$