2020 大阪市大

1 (1) $\sin x = \sin(x-\alpha)$ より　$x = x-\alpha+2n\pi$ または $x = \pi-(x-\alpha)+2n\pi$ （nは整数）

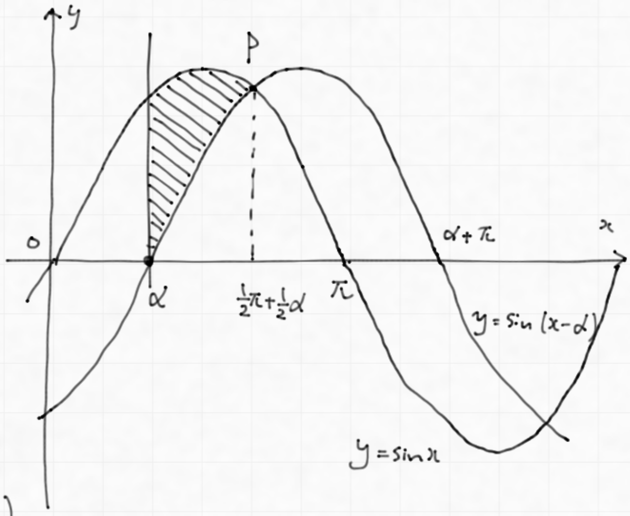
$0<\alpha<\pi$ だから $x \neq x-\alpha+2n\pi$ なので $x=\pi-(x-\alpha)+2n\pi$

このとき $2x = \pi+\alpha+2n\pi \iff x = \frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\alpha+n\pi$

となるが、このうちで正で最小のものは $x=\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\alpha$ このとき $y=\sin\left(\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\alpha\right)=\cos\frac{1}{2}\alpha$

よってPの座標は $\left(\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\alpha,\ \cos\frac{1}{2}\alpha\right)$

(2) 右図の斜線部分をx軸について回転させる



$$V(\alpha) = \int_\alpha^c \pi\sin^2 x\,dx - \int_\alpha^c \pi\sin^2(x-\alpha)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_\alpha^c 1-\cos 2x - 1+\cos 2(x-\alpha)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 2(x-\alpha)\right]_\alpha^c$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(-\sin(\pi+\alpha)+\sin(\pi-\alpha)+\sin 2\alpha-\sin 0\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\sin\alpha+\sin\alpha+\sin 2\alpha\right) = \frac{\pi}{4}\left(2\sin\alpha+\sin 2\alpha\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\sin\alpha(1+\cos\alpha)$$

(3) $V'(\alpha) = \frac{\pi}{2}\cos\alpha(1+\cos\alpha)+\frac{\pi}{2}\sin\alpha(-\sin\alpha) = \frac{\pi}{2}\left(\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)$

$= \frac{\pi}{2}\left(\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1\right) = \frac{\pi}{2}(2\cos\alpha-1)(\cos\alpha+1)$

$V'(\alpha)=0$ となるのは $\cos\alpha=\frac{1}{2}, -1$ であるが、$0<\alpha<\pi$ の範囲にあるのは $\alpha=\frac{\pi}{3}$ のみ.

$V(\alpha)$ の増減は次のようになる

α	0	…	$\frac{\pi}{3}$	…	π
$V'(\alpha)$	／	+	0	−	／
$V(\alpha)$	／	↗		↘	／

$V\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}\sqrt{3}\pi$

以上より $V(\alpha)$ は $\alpha=\frac{\pi}{3}$ のとき最大となり、最大値は $\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$

2020 大阪市大

2 (1) αは3次方程式の解なので $\alpha^3-3\alpha^2+p\alpha+q=0$

両辺の共役複素数を考えると $\overline{\alpha^3-3\alpha^2+p\alpha+q}=\overline{0}$

$\Leftrightarrow \overline{\alpha^3}-\overline{3\alpha^2}+\overline{p\alpha}+\overline{q}=0 \Leftrightarrow \overline{\alpha}^3-3\overline{\alpha}^2+p\overline{\alpha}+q=0$ ($\because p, q$は実数)

これは$\overline{\alpha}$が3次方程式の解であることを示している。 証明終

(2) αの虚部をsとする ($\alpha=r+si$)

条件より

$|2si|=|r+si-b|=2\sqrt{3} \Leftrightarrow 2s=\sqrt{(r-b)^2+s^2}=2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow |s|=\sqrt{3}, \ (r-b)^2+3=12 \Leftrightarrow |s|=\sqrt{3}, \ |r-b|=3$

$\therefore |r-b|=\mathbf{3}$

(3) $\alpha, \overline{\alpha}, b$は3次方程式の解なので、解と係数の関係より

$\alpha+\overline{\alpha}+b=3, \ \alpha\overline{\alpha}+b\alpha+b\overline{\alpha}=p, \ \alpha\overline{\alpha}b=-q$

$\Leftrightarrow 2r+b=3, \ r^2+s^2+2br=p, \ (r^2+s^2)b=-q$

ここに$|s|=\sqrt{3}$を代入

$2r+b=3 \cdots ①$ $r^2+2br+3=p \cdots ②$ $-(r^2+3)b=q \cdots ③$

これに(2)より $|r-b|=3 \cdots ④$

・$r-b=3$のとき、①と連立して $r=2, \ b=-1$

このとき②より $p=4-4+3=3$、③より $q=-(4+3)(-1)=7$ $(p, q)=(3, 7)$

・$r-b=-3$のとき ①と連立して $r=0, \ b=3$

このとき②より $p=0+0+3=3$ ③より $q=-(0+3)\times 3=-9$ $(p, q)=(3, -9)$

以上より、 $(p, q)=\mathbf{(3, 7), (3, -9)}$

2020 大阪市大

3 (1) $x>1$の範囲で $y=\frac{1}{x}$ および $y=\frac{1}{x-1}$ はいずれも単調に減少する.

$$\int_m^{n+1}\frac{1}{x}dx=\sum_{k=m}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\sum_{k=m}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx=\sum_{k=m}^{n}\left[\frac{1}{k}x\right]_k^{k+1}=\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\int_m^{n+1}\frac{dx}{x-1}=\sum_{k=m}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x-1}dx>\sum_{k=m}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1-1}dx=\sum_{k=m}^{n}\left[\frac{1}{k}x\right]_k^{k+1}=\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}$$

よって $1<m\leqq n$ を満たす自然数 m, n に対し,

$\int_m^{n+1}\frac{dx}{x}<\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}<\int_m^{n+1}\frac{1}{x-1}dx$ が成り立っていることが示された　　　　証明終

(2) (1)より $\int_3^{2021}\frac{dx}{x}<\sum_{k=3}^{2020}\frac{1}{k}<\int_3^{2021}\frac{dx}{x-1}$

$$\Leftrightarrow\quad 1+\frac{1}{2}+\int_3^{2020}\frac{dx}{x}+\int_{2020}^{2021}\frac{dx}{x}<\sum_{k=1}^{2020}\frac{1}{k}<1+\frac{1}{2}+\int_3^{2021}\frac{dx}{x-1}\quad\cdots①$$

ここで $\int_3^{2020}\frac{dx}{x}=\left[\log x\right]_3^{2020}=\log 2020-\log 3=7.61-1.10=6.51$

となるので ① の左辺は

$$1+\frac{1}{2}+\int_3^{2020}\frac{dx}{x}+\int_{2020}^{2021}\frac{dx}{x}=8.01+\int_{2020}^{2021}\frac{dx}{x}\quad\cdots②$$

同様に①の右辺は

$$1+\frac{1}{2}+\int_3^{2021}\frac{1}{x-1}dx=1.5+\left[\log|x-1|\right]_3^{2021}=1.5-\log 2+\log 2020=1.5-0.69+7.61$$
$$=8.42\quad\cdots③$$

② ③ と ① より

$$8.01+\int_{2020}^{2021}\frac{dx}{x}<\sum_{k=1}^{2020}\frac{1}{k}<8.42$$

よって $\sum_{k=1}^{2020}\frac{1}{k}$ の整数部分は **8**

2020 大阪市立

4

(1) $\vec{AB}=(-\sqrt{3},3,0)$, $\vec{AP}=(p-\sqrt{3},q,r)$

これを $\vec{AB}\cdot\vec{AP}=0$ に代入　$-\sqrt{3}(p-\sqrt{3})+3q=0$　$\sqrt{3}p-3q=3$　　∴ $p=\sqrt{3}q+\sqrt{3}$

$\vec{CP}=(p+\sqrt{3},q,r)$

$\vec{AP}\cdot\vec{CP}=p^2-3+q^2+r^2=4$

ここに $p=\sqrt{3}q+\sqrt{3}$ を代入　$3q^2+6q+\cancel{3}-\cancel{3}+q^2+r^2=4$

$r^2=-4q^2-6q+4$

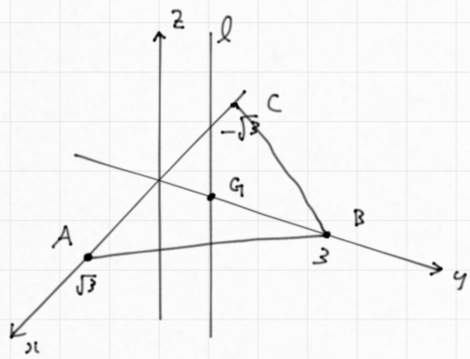
rが存在するためには上式の右辺が正でなければならないので　(∵ $r>0$)

$-4q^2-6q+4>0 \Leftrightarrow 2q^2+3q-2<0 \Leftrightarrow (2q-1)(q+2)<0$

$\Leftrightarrow -2<q<\frac{1}{2}$

このとき

$r=\sqrt{-4q^2-6q+4}$



(2) △ABCの重心をGとするとGは $(0,1,0)$

lは $y=1, x=0$

MはBPの中点なので $M\left(\frac{p}{2}, \frac{3+q}{2}, \frac{r}{2}\right)$

Nはl上にあるので $(0,1,z)$

$\vec{BP}\cdot\vec{MN}=(p,q-3,r)\cdot\left(-\frac{p}{2}, 1-\frac{3+q}{2}, z-\frac{r}{2}\right)$

$=-\frac{1}{2}p^2+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}q-\frac{1}{2}q-\frac{1}{2}q^2+zr-\frac{r^2}{2}=0$

$zr=\frac{1}{2}p^2-q-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}q^2+\frac{r^2}{2}=\frac{3}{2}(q+1)^2-q-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}q^2+\frac{1}{2}(-4q^2-6q+4)$

$=\frac{3}{2}q^2+3q+\cancel{\frac{3}{2}}-q-\cancel{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}q^2-2q^2-3q+2=-q+2$

$z=\frac{-q+2}{\sqrt{-4q^2-6q+4}}$　　　$N\left(0, 1, \frac{-q+2}{\sqrt{-4q^2-6q+4}}\right)$

(3) $f(q)=\frac{-q+2}{\sqrt{4q^2-6q+4}}$ とおく.　$f'(q)=\frac{-\sqrt{4q^2-6q+4}-(-q+2)\cdot\frac{\frac{1}{2}(8q-6)}{\sqrt{4q^2-6q+4}}}{(4q^2-6q+4)}$

$=\frac{11\left(q+\frac{2}{11}\right)}{(4q^2-6q+4)\sqrt{4q^2-6q+4}}$

よって $f(q)$ の $-2<x<\frac{1}{2}$ の範囲の増減は次のようになる

q	-2	$\cdots$	$-\frac{2}{11}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(q)$		$-$	0	$+$	
$f(q)$		↘		↗	

よって $f(q)$ は $q=-\frac{2}{11}$ で最小となる.

すなわち、Nのz座標が最小となるのは $q=-\frac{2}{11}$ のとき