2019 兵庫医大

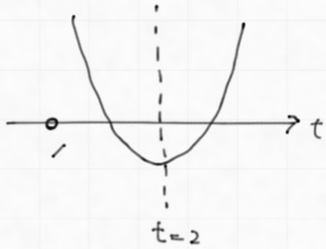
1 (1) $2^x=t$ とおく. (ここで $x>0$ のとき $t=2^x>2^0=1$)

方程式は $t^2-4t+a^2-3a+4=0$ と表せる。

上の式の左辺を $f(t)$ とおくと 2^x は単調増加するので、題意は

$y=f(t)$ のグラフが $t>1$ の範囲に異なる正の解を持つこととなる. ここで、$f(t)$ は

$$f(t)=(t-2)^2+a^2-3a$$



と変形できるが、これより $f(t)$ の軸は $t=2$ であることが分かる

ので、そのための条件は、

$$f(1)>0 \quad \cdots ① \quad , \quad f(2)<0 \quad \cdots ②$$

の2つが同時に成り立つことで、

① より $f(1)=a^2-3a+1>0 \iff \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}>a,\ a>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \cdots ①'$

② より $f(2)=a^2-3a<0 \iff 0<a<3 \cdots ②'$

①'②' より $\mathbf{0<a<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}<a<3}$

2019 兵庫医大

1

(2)

(a) $b_{n+1} = a_{n+1} + 4$

$$= \frac{2a_n+4}{a_n+5} + 4$$

$$= \frac{6a_n + 24}{a_n+5}$$

$$= \frac{6(b_n-4)+24}{b_n-4+5}$$

$$= \frac{6b_n}{b_n+1}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{b_{n+1} = \frac{6b_n}{b_n+1}}$$

(b) $b_1 \neq 0$ であり $b_k \neq 0$ のとき $b_{k+1} \neq 0$ だから. 帰納的に全ての n について $b_n \neq 0$

(a)の結果の逆数をとる.

$$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{b_n+1}{6b_n} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{b_n}\right) + \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{5} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{5}\right)$$

よって $\left\{\frac{1}{b_n} - \frac{1}{5}\right\}$ は公比 $\frac{1}{6}$ の等比数列である. また $\frac{1}{b_1} - \frac{1}{5} = \frac{1}{a_1+4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{2+4} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{30}$ だから

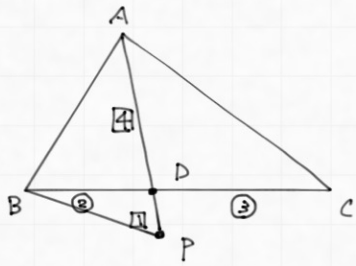
$\left\{\frac{1}{b_n} - \frac{1}{5}\right\}$ の一般項は

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{30} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

$$b_n = \frac{5\cdot 6^n}{6^n - 1}$$

$$\therefore\ a_n = b_n - 4 = \boldsymbol{\frac{6^n+4}{6^n-1}}$$

2019 兵庫医大



$\boxed{1}$ (3) $\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

Aを始点に揃える

$\overrightarrow{AP}+3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$

$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{5}{4}\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right)$

PはBCを2:3に内分する点をDとして ADを5:1に外分する点（右上図）

$\triangle ABD=\frac{2}{5}\triangle ABC$, $\triangle ABP=\frac{5}{4}\triangle ABD$

より $\triangle ABP=\frac{5}{4}\times\frac{2}{5}\triangle ABC=\frac{1}{2}$

2019 兵庫医大

$\boxed{1}$ (4) (a)

4人の手の出し方の総数は 3^4 通り.

そのうち2人が勝つ、人の選び方は ${}_4C_2$ 通り.

その手の出し方は ${}_3C_1$ 通り.

負ける2人は自動的に決まり. また. その出す手も決まる.

以上より $\dfrac{{}_4C_2 \times {}_3C_1}{3^4} = \dfrac{2}{9}$

(b) あいこになるのは ① 4人が全て同じ手を出す. ② 3つの手が全て出される

の2つのパターンがある.

① は 3通り.

② は

3つの手のどれが 2人から出されるか ${}_3C_1$ 通り

その手を出す人の選び方 ${}_4C_2$

残りの2人の手の出し方 ${}_2C_1$

以上より $\dfrac{3 + {}_3C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_1}{3^4} = \dfrac{13}{27}$

(c) 余事象を考える.

勝負がつくのは 2種類の手が出たときで、

手の選び方 ${}_3C_2$ 通り.

n人が 上の2通りの手のいずれか一方を出す 2^n

上のうち、全員が同じ手を出す 2通りを除く.

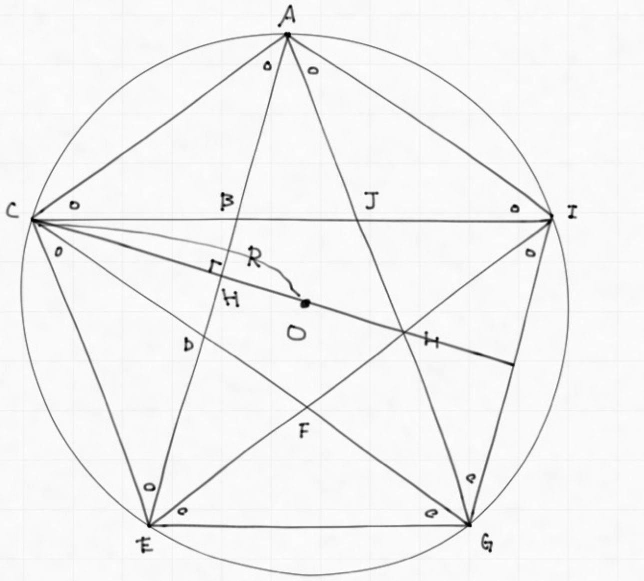
以上より 余事象(勝負が決まる)確率は

$$\frac{{}_3C_2\,(2^n - 2)}{3^n}$$

したがって、もとめる確率は

$$1 - \frac{{}_3C_2\,(2^n - 2)}{3^n} = \frac{3^{n-1} - 2^n + 2}{3^{n-1}}$$

2019 兵庫医大



$\boxed{2}$ (1) A, C, E, G, I は同一円周上にあり、

AE = EI = IC = CG = GA だから、これらの円周角は等しく

$\angle ACG = \angle CEG = \angle EGI = \angle GIA = \angle IAC$

すなわち右図 ACEGI は正五角形であり、その1つの

内角は $108°$ $(180° \times (5-2) \div 5)$

また △ACI は AC = AI の二等辺三角形なので

$\angle ACI = \angle AIC = \dfrac{180°-108°}{2} = 36°$

であり、同様に考えて、右図中の o 印のついた角は全て $108°$

△ABJ, △CBD について

$\angle BAJ = 108° - 36° \times 2 = 36°$, $\angle BCD = 108° - 36° \times 2 = 36°$

だから $\angle BAJ = \angle BCD$ …①

$\angle ABC = \angle CBD$ (対頂角) …②

また △BAC が二等辺三角形 ($\because \angle BAC = \angle BCA$) なので AB = CB …③

①, ②, ③ より二辺狭角が等しいので

$\triangle ABJ \equiv \triangle CBD$

証明終

(2) AD = x とおく。

△ACE と △CDE について、36° の角が2つずつあるので両者は相似

したがって AE : AC = CE : DE が成り立ち、

$1 : x = x : 1-x \iff x^2 + x - 1 = 0 \iff x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$ $x > 0$ だから $x = \mathbf{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$

(3) C から AE に下ろした垂線の足を H とする。

$AC = AD = x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $AH = \dfrac{1}{2}AE = \dfrac{1}{2}$ だから $\cos\angle CAH = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}-1} = \cos 36°$

$\sin 36° = \sqrt{1-\cos^2 36°} = \dfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

$\triangle CIF = \dfrac{1}{2} \times 1 \times x \times \sin 36° = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \times \dfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{16}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

$\triangle ABJ = \dfrac{1}{2}(1-x)^2 \sin 36° = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \dfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \dfrac{7-3\sqrt{5}}{16}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

五芒星の面積 $= \triangle CIF + \triangle ABJ + \triangle EDF + \triangle GFH = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}\left(\sqrt{5}-1+(7-3\sqrt{5}) \times 3\right) = \dfrac{5-2\sqrt{5}}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

(4) 外接円半径を R として、 $2R = \dfrac{AI}{\sin 36°}$ より $R = \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ (円の中心を O とする)

$CH = x \sin 36°$ $OH = R - CH$

五角錐の高さは $\sqrt{CH^2 - OH^2}$

底面積は $\triangle CIF - \triangle ABJ \times 2$

以上より体積は $V = \dfrac{1}{3}\sqrt{CH^2-OH^2}\,(\triangle CIF - 2\triangle ABJ) = \cdots = \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\sqrt{\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}} = \mathbf{\dfrac{9\sqrt{5}-20}{12}}$

2019 兵庫医大

$\boxed{3}$ (1) $f(-x) = \log(-x + \sqrt{x^2+a})$

$f(x) + f(-x) = \log(x + \sqrt{x^2+a}) + \log(x - \sqrt{x^2+a}) = \log(x^2 - x^2 + a) = \log a$

$\therefore\ \mathbf{f(x) + f(-x) = \log a}$

(2) $a=1$ のとき $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$

$f'(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \times \left(1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

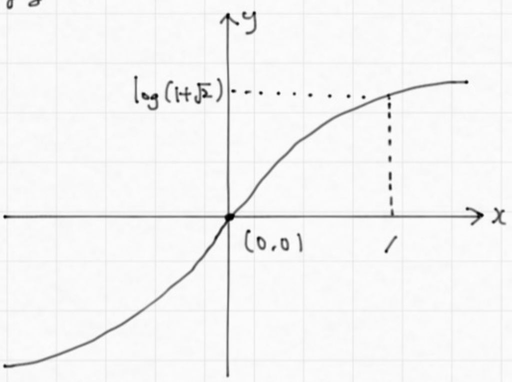
$f''(x) = -\dfrac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \times 2x = \dfrac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

$f'(x)$ は常に正なので $f(x)$ は単調に増加する.

$f''(x)$ は $x<0$ で正 $x>0$ で負となるので $f(x)$ は $x>0$ で上に凸 $x<0$ で下に凹

$f''(x) = 0$ となるのは $x=0$. このとき $f'(0) = 1 > 0$ だから $(x, y) = (0, f(0)) = (0, 0)$ が変曲点

グラフは次のようになる



x	$\cdots$	0	$\cdots$
f'	$+$	1	$+$
f''	$+$	0	$-$
f	↗	0	↗

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (複号同順)

(3) $V_1 = \displaystyle\int_0^1 \pi y^2\,dx$　　$V_2 = \displaystyle\int_0^{f(1)} \pi x^2\,dy$

$y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ より　$e^y = x + \sqrt{x^2+1}$　$\Leftrightarrow$　$e^y - x = \sqrt{x^2+1}$

両辺2乗して　$e^{2y} - 2xe^y = 1$　　$x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$　　$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$

$V_1 = \displaystyle\int_0^1 \pi y^2\,dx = \int_0^{f(1)} \pi y^2 \frac{e^y + e^{-y}}{2}\,dy = \frac{\pi}{2}\int_0^{f(1)} y^2(e^y + e^{-y})\,dy$

ここで $\displaystyle\int y^2(e^y + e^{-y})\,dy = y^2(e^y - e^{-y}) - 2\int y(e^y - e^{-y})\,dy = y^2(e^y - e^{-y}) - 2y(e^y + e^{-y}) + 2\int e^y + e^{-y}\,dy$

$= y^2(e^y - e^{-y}) - 2y(e^y + e^{-y}) + 2e^y - 2e^{-y} + C = (y^2 - 2y + 2)e^y + (-y^2 - 2y - 2)e^{-y} + C$

だから $f(1) = \alpha$ と表して. ($e^\alpha = 1 + \sqrt{2}$)

$V_1 = \dfrac{\pi}{2}\Big[(y^2 - 2y + 2)e^y + (-y^2 - 2y - 2)e^{-y}\Big]_0^\alpha = \dfrac{\pi}{2}\left((\alpha^2 - 2\alpha + 2)(1+\sqrt{2}) + (-y^2 - 2y - 2)\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\right)$

$= \pi(\alpha - \sqrt{2})^2$

また $V_2 = \displaystyle\int_0^\alpha \pi \frac{(e^y + e^{-y})^2}{4}\,dy = \frac{\pi}{4}\int_0^\alpha e^{2y} + 2 + e^{-2y}\,dy = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2y} + 2y - \frac{1}{2}e^{-2y}\right]_0^\alpha = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2} - \alpha)$

$\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2\pi(\sqrt{2} - \alpha)^2}{\pi(\sqrt{2} - \alpha)} = 2(\sqrt{2} - \alpha) = \mathbf{2\sqrt{2} - 2\log(1+\sqrt{2})}$