2020 近畿大(医)

1

(1) 各群の末項は　1, 5, 14, 30, 55, …

$$\underbrace{1,\ 5}_{4},\ \underbrace{5,\ 14}_{9},\ \underbrace{14,\ 30}_{16},\ \underbrace{30,\ 55}_{25}$$

と変わっていくので　$1+\sum_{l=1}^{k-1}(l+1)^2 = 1+\sum_{l=2}^{k} l^2 = 1+\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)-1^2 = \mathbf{\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)}$

(2) 第n群の末項は k群にk個の項が含まれているので　$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ 番目の項

a_{100} が第n群に属しているとき　$\frac{1}{2}(n-1)(n-1+1)<100<\frac{1}{2}n(n+1)$ が成り立つので

$n=14$ で 第14群の末項は $\frac{1}{2}\times14\times15=105$ 番目の項で、その値は

$a_{105}=\frac{1}{6}\times14\times15\times29=1015$

$a_{100}=a_{105}-14\times5=\mathbf{945}$

$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)<2020$ を満たす最大のnは　$n=17$

第17群の末項は　$\frac{1}{2}\times17\times18=153$ 番目の項で、その値は $a_{153}=\frac{1}{6}\times17\times18\times35=1785$

第18群は、初項が $1785+18$、公差18の等差数列だから 第18群の中のm番目の項は

$a_{153+m}=1785+18m$

$a_{153+m}<2020$ を満たす最大のmは

$1785+18m<2020$

$m<\frac{235}{18}=13.\cdots$　　　$\therefore\ m=13$

以上より $a_n<2020$ を満たす最大のnは　$n=153+13=\mathbf{166}$

(3) 第k群の末項は　$\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$　初項は $\frac{1}{6}(k-1)k(2k-1)+k$　項数はk項

総和をSとすると

$$S=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+\frac{1}{6}(k-1)k(2k-1)+k\right\}\times k$$

$$=\frac{1}{12}k^2\left(2k^2+3k+1+2k^2-k-2k+1+6\right)=\mathbf{\frac{1}{3}k^2(k^2+2)}$$

(4) $\frac{1}{2}n(n+1)\leqq30$ を満たす最大のnは 7　第7群の末項は $\frac{1}{2}\times7\times8=28$ だから a_{28} $\left(=\frac{1}{6}\times7\times8\times15=140\right)$

$$S_{30}=a_1+a_2+\cdots+a_{28}+a_{29}+a_{30}$$

$$=\sum_{k=1}^{7}\frac{1}{3}k^2(k^2+2)+148+156=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{7}k^4+\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{7}k^2+304$$

$$=\frac{1}{3}(1+16+81+256+625+1296+2401)+\frac{2}{\cancel{3}}\times\frac{1}{\cancel{6}_{3}}\times7\times\cancel{8}^{4}\times\cancel{15}^{5}+304$$

$$=\frac{1}{3}\times4676+\frac{1}{3}\times280+304=1652+304=\mathbf{1956}$$

4956

2020 近畿大

2

(1) $\cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta) = \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta = (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \mathbf{4t^3-3t}$

$\cos 2\theta \cos 4\theta = \cos 2\theta \cdot (2\cos^2 2\theta - 1) = 2\cos^3 2\theta - \cos 2\theta = 2(2\cos^2\theta-1)^3 - (2\cos^2\theta - 1)$

$= 16\cos^6\theta - 24\cos^4\theta + 10\cos^2\theta - 1 = \mathbf{16t^6-24t^4+10t^2-1}$

$\cos 3\theta = 4t^3 - 3t$ で $\theta = \frac{\pi}{9}$ とすると. $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = 4t^3 - 3t$

$t = \cos\frac{\pi}{9}$ として $f\left(\frac{\pi}{9}\right) = t(16t^6 - 24t^4 + 10t^2 - 1)$

$= (8t^3 - 6t - 1)\left(2t^4 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{4}t + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8} = \mathbf{\frac{1}{8}}$

$$
\begin{array}{r|rrrrrrrr}
 & 2 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & & & \\
\hline
8\ 0\ -6\ -1 & 16 & 0 & -24 & 0 & 10 & 0 & -1 & 0 \\
 & 16 & 0 & -12 & -2 & & & & \\
\hline
 & & & -12 & 2 & 10 & 0 & & \\
 & & & -12 & 0 & 9 & +\frac{3}{2} & & \\
\hline
 & & & & 2 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \\
 & & & & 2 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & \\
\hline
 & & & & & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\
 & & & & & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\
\hline
 & & & & & & & & \frac{1}{8}
\end{array}
$$

(2) 両辺を 7で割った余りも等しい

$4y \equiv 4 \pmod 7$

$y \equiv 1 \pmod 7$

(☆)で $y = 1$ とすると $7x = 2009$ $x = 287$

$$
\begin{array}{rr}
 & 7x + 11y = 2020 \\
-) & 7\cdot 287 + 11\cdot 1 = 2020 \\
\hline
 & 7(x-287) + 11(y-1) = 0
\end{array}
$$

$7(x-287) = -11(y-1)$

左辺は7の倍数. 右辺は11の倍数なので. 整数kを用いて

$x - 287 = 11k$, $y - 1 = -7k$

$$\begin{cases} x = 287 + 11k \\ y = -7k + 1 \end{cases}$$

$x \geqq 1$. $y \geqq 1$ を満たすkは $287 + 11k \geqq 1$ より $k \geqq \frac{-286}{11} = -26$

$-7k + 1 \geqq 1$ より $k \leqq 0$. つまり $-26 \leqq k \leqq 0$ ∴ **27組**

また $|-3x+7y| = |-3(287+11k) + 7(-7k+1)| = |-82k - 854| = (*)$

$-82k - 854 = 0$ を解くと $k = -10.7\ldots$

$k = -10$ のとき $(*) = 34$ $k = -11$ のとき $(*) = 48$

$k = 0$ のとき $(*) = 854$ $k = -26$ のとき $(*) = 1278$

よって 最大値は **1278** 最小値は **34**

2020 近畿大 (医)

3

(1) $2020 \div 5 = 404 \cdots 0$

$404 \div 5 = 80 \cdots 4$

$80 \div 5 = 16 \cdots 0$

$16 \div 5 = 3 \cdots 1$

1〜2020 までの数で 5^1 の倍数は 404コ

5^2 〃 80コ

5^3 〃 16コ

5^4 〃 3コ

$404+80+16+3=503$ だから

したがって 2020! は 5^{503} で割り切れる. (5^{504} では割り切れない)

2020! が 2^{503} で割り切れるのは明らかなので. 10^{503} で割り切れる.

∴ 末尾の 0 の数は **503** 個

(2) $\log_{10} 3^{2020} = 2020 \times 0.47712 = 963.7824$ ∴ **964** 桁

$10^{963.7824} = 10^{0.7824} \cdot 10^{963}$

また $\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.30103 + 0.47712 = 0.77815 < 0.7824 < \log_{10} 7$

だから $6 < 10^{0.7824} < 7$ 最初の数は **6**

(3) $3^{2020} = 9^{1010} = (10-1)^{1010} = \sum_{k=0}^{1010} {}_{1010}C_k 10^k (-1)^{1010-k}$

これを 10^3 で割った余りは

$$
\begin{aligned}
3^{2020} &\equiv {}_{1010}C_2 10^2 - {}_{1010}C_1 10^1 + 1 && (\mathrm{mod}\ 10^3) \\
&\equiv \frac{1010 \times 1009}{2} \times 10^2 - 10100 + 1 && (\ 〃\ ) \\
&\equiv 505 \times 9 \times 10^2 - 100 + 1 && (\ 〃\ ) \\
&\equiv 545 \times 100 - 100 + 1 && (\ 〃\ ) \\
&\equiv 500 - 100 + 1 && (\ 〃\ ) \\
&\equiv 401 && (\ 〃\ )
\end{aligned}
$$

3^{2020} を 10^3 で割った余りは 401