2018 藤田医科(指)

1 (1)

$$\frac{\frac{7\cancel{00}}{10\cancel{00}}\times\frac{3}{1\cancel{00}}}{\frac{7\cancel{00}}{10\cancel{00}}\times\frac{3}{1\cancel{00}}+\frac{3\cancel{00}}{10\cancel{00}}\times\frac{2}{1\cancel{00}}}=\frac{21}{21+6}=\mathbf{\frac{7}{9}}$$

(2) $\log x^y=\log y^x \iff y\log x = x\log y$ ここに $y=x^{\frac{3}{4}}$ を代入

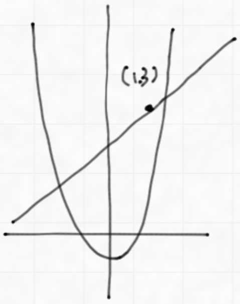
$$x^{\frac{3}{4}}\log x = x\log x^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}x\log x$$

$(\log x)\,x\,(x^{-\frac{1}{4}}-\frac{3}{4})=0$ $\qquad \log x=0$, $x=0$, $x^{-\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}$

∴ $x=1,0,(\frac{4}{3})^4$ $\quad$ このうち $x>1$ を満たすのは $x=\mathbf{\frac{256}{81}}$

このとき $y=(\frac{4}{3})^{4\times\frac{3}{4}}=\mathbf{\frac{64}{27}}$

(3)



$y=m(x-1)+3$ と $y=2x^2-1$ を連立

$2x^2-mx+m-4=0$

解を α,β として $\alpha+\beta=\frac{m}{2}$, $\alpha\beta=\frac{m-4}{2}$

$$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{m^2}{4}-2m+8=\frac{1}{4}(m-4)^2+4\ \ge 4$$

$$S=\frac{2}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{3}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}\ge\frac{1}{3}\times4^{\frac{3}{2}}=\mathbf{\frac{8}{3}}$$

(4) $|3\vec{a}-2\vec{b}|^2=4^2 \iff 9\cdot6^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+4\cdot25=16 \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=34$

$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=36+34t-34-25t=9t+2=0$ $\qquad t=\mathbf{-\frac{2}{9}}$

(5) $\vec{AB}=(-1,1,2)$, $\vec{AC}=(2,4,-2)$

$\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ の両方に垂直なベクトルの1つは $(-10,2,-6)$

平面は $-10(x-2)+2(y-1)-6(z-3)=0$ と表せる. ここに $(3,3,z)$ を代入

$-10+4-6z+18=0$ $\qquad z=\mathbf{2}$

(6) a_n について $a_1=2\neq0$ であり $a_k\neq0$ なら $a_{k+1}\neq0$ なので帰納的に明らか.

与えられた漸化式の逆数をとる

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+1 \qquad \frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}+(n-1)\times1=n-\frac{1}{2}=\frac{2n-1}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{2n-1} \qquad ∴\ a_{50}=\mathbf{\frac{2}{99}}$$

(7) 双曲線は $(5x+12y)(5x-12y)=k$ とおける

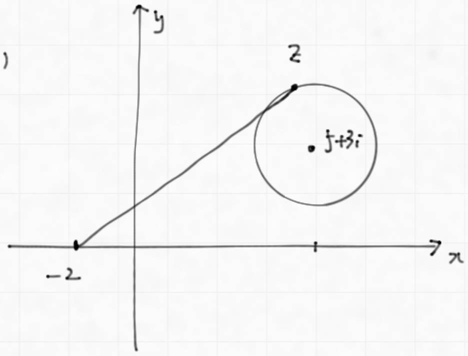
$\left(\frac{72}{5}, \sqrt{11}\right)$ を通るので $25\cdot\left(\frac{72}{5}\right)^2 - 12^2\times 11 = k = 3600$ $\quad 25x^2-144y^2=3600$

$\frac{x^2}{12^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$ $\quad \sqrt{12^2+5^2} = \sqrt{169} = 13$ 焦点間の距離は **26**

(8) $x = \tan y$ $\quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$

$\therefore f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad f'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{1+\frac{9}{16}} = \mathbf{\frac{16}{25}}$

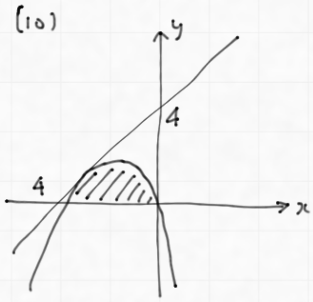
(9)



$5+3i$ と -2 との距離は $\sqrt{7^2+3^2} = \sqrt{58}$ だから

$2-\sqrt{58} \leqq |z-2| \leqq \mathbf{2+\sqrt{58}}$

(10)



$x+4 = -ax^2+bx \quad \Leftrightarrow \quad ax^2+(1-b)x+4=0 \quad \cdots ①$

判別式 $D = (1-b)^2 - 16a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{16}(b-1)^2 \quad \cdots ②$

②を①に代入

$(b-1)^2x^2 + 16(1-b)x + 64 = 0$

$\{(b-1)x - 8\}^2 = 0$

$x = \frac{8}{b-1} \qquad y = \frac{8}{b-1} + 4 = \frac{4b+4}{b-1}$

第2象限で接する条件は $\frac{8}{b-1} < 0$ かつ $\frac{4(b+1)}{b-1} > 0$ $\quad \Leftrightarrow \quad b-1<0,\ b+1<0 \quad \Leftrightarrow \quad b<-1$

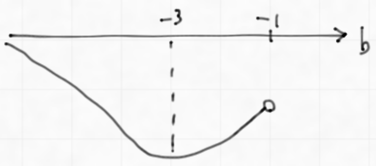
$-ax^2+bx=0$ を解くと $x=0,\ \frac{b}{a}$

$$S = \left|\frac{a}{6}\left(\frac{b}{a}-0\right)^3\right| = \left|\frac{b^3}{6}\times\frac{16^2}{(b-1)^4}\right| = \left|\frac{128}{3}\times\frac{b^3}{(b-1)^4}\right|$$

$f(b) = \frac{b^3}{(b-1)^4}$ とおく $\quad f'(b) = \frac{3b^2(b-1)^{\cancel{4}\,3} - 4\cancel{(b-1)^3}\cdot b^3}{(b-1)^{\cancel{8}\,5}} = \frac{-b^2(b+3)}{(b-1)^5}$

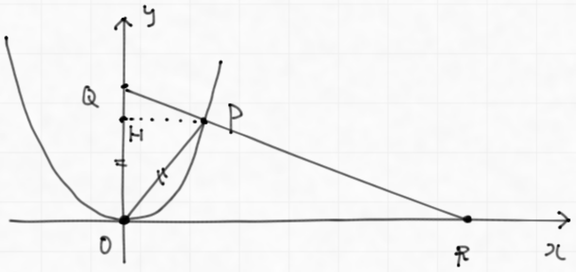
b	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1
$f'(b)$	$-$	0	$+$	/
$f(b)$	↘	$-\frac{27}{256}$	↗	/

$\therefore S = \left|\frac{128}{3}f(b)\right| \leqq \left|\frac{128}{3}f(-3)\right| = \mathbf{\frac{9}{2}}$



2018 藤田医科(推)

2



$$\overline{OP} = \sqrt{t^2 + a^2 t^{2p}}$$

Pからy軸に下ろした垂線の足をHとすると

$$QH = OQ - OH = \overline{OP} - at^p$$

$QH : HP = OQ : OR$ より

$$OR = \frac{HP \cdot OQ}{QH} = \frac{t\ \overline{OP}}{\overline{OP} - at^p}$$

$$= \frac{t\sqrt{t^2 + a^2 t^{2p}}}{\sqrt{t^2 + a^2 t^{2p}} - at^p}$$

(2)

$$\lim_{t \to +0} OR = \lim_{t \to +0} \frac{t\sqrt{t^2 + a^2 t^{2p}}}{\sqrt{t^2 + a^2 t^{2p}} - at^p}$$

$$= \lim_{t \to +0} \frac{t\sqrt{t^2 + a^2 t^{2p}}\left(\sqrt{t^2 + a^2 t^{2p}} + at^p\right)}{t^2 + \cancel{a^2 t^{2p}} - \cancel{a^2 t^{2p}}}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{t^2 + a^2 t^{2p} + at^p\sqrt{t^2 + a^2 t^{2p}}}{t} = \lim_{t \to \infty}\left(t + a^2 t^{2p-1} + at^{p-1}\sqrt{t^2 + a^2 t^{2p}}\right) = (*)$$

$p \neq 1, \frac{1}{2}$ のとき　$(*) = 0$

$p = 1$ のとき　$(*) = \lim_{t \to \infty}\left(t + a^2 t^1 + a\sqrt{t^2 + a^2 t^2}\right) = 0$

$p = \frac{1}{2}$ のとき　$(*) = \lim_{t \to \infty}\left(t + a^2 + at^{-\frac{1}{2}}\sqrt{t^2 + a^2 t}\right) = a^2$

これが10となれば良いので　$a^2 = 100$　$a = 10$

以上より　**$p = \frac{1}{2}$, $a = 10$**

3 (1) b, c がいずれも偶数だとすると、b と c が互いに素であるという条件に反する。

b, c がいずれも奇数だとする。

ここで、奇数 $2n-1$ の平方数 $(2n-1)^2 = 4(n^2-n)+1$ は 4で割った余りが1となる。

したがって b^2+c^2 を4で割った余りは 2となるが、a^2 を4で割った余りは、a が偶数のときは0

奇数のときは1　　よって b, c がいずれも奇数となることはない。

以上より、b, c のうち、どちらか一方が奇数、もう一方は偶数である。

(2) b が偶数であるとする。（このとき (1) より c は奇数、また (1) の考察より、a も奇数）

$b = 2b'$, $c = 2c'-1$, $a = 2a'-1$ 　(a', b', c' は自然数) とおける

$(2a'-1)^2 = (2b')^2 + (2c'-1)^2 \iff 4a'^2 - 4a' + \cancel{1} = 4b'^2 + 4c'^2 - 4c' + \cancel{1}$

$b'^2 = a'^2 - a' - c'^2 + c' = (a'+c')(a'-c') - (a'-c') = (a'-c')(a'+c'-1)$

ここで、a', c' について、　a' と c' の偶奇が一致するとき $a'-c'$ は偶数なので b' も偶数。

このとき $b (= 2b')$ は 4の倍数。

a' と c' の偶奇が一致しないとき $a'+c'-1$ は偶数なので、b' も偶数で、b は4の倍数。

b が奇数のときは c が偶数なので、同様に考えると c は4の倍数といえる。

よって、b と c のいずれかは4の倍数。

(3) b が4の倍数とする　$b^2 = a^2 - c^2 = 65^2 - c^2 < 65^2$

だから $b = 4, 8, 12, 16, \ldots 64$

b と a は互いに素だから $b \neq 4\times5, 4\times10, 4\times13$

$b=4$ のとき　$c^2 = 65^2 - 4^2 = 61\times69$ … 平方数ではない

$b=8$ 〃　$c^2 = 65^2 - 8^2 = 57\times73$ … 〃

$b=12$ 〃　$c^2 = 65^2 - 12^2 = 53\times77$ … 〃

$b=16$ 〃　$c^2 = 65^2 - 16^2 = 49\times81 = (7\times9)^2$　$c = 63$　$(a, b, c) = (65, 16, 63)$

$b=24$ 〃　$c^2 = 65^2 - 24^2 = 41\times89$ … 平方数ではない

$b=28$ 〃　$c^2 = 65^2 - 28^2 = 37\times94$ … 〃

$b=32$ 〃　$c^2 = 65^2 - 32^2 = 33\times97$ … 〃

$b=36$ 〃　$c^2 = 65^2 - 36^2 = 29\times101$ … 〃

$b=44$ 〃　$c^2 = 65^2 - 44^2 = 21\times109$ … 〃

$b=48$ 〃　$c^2 = 65^2 - 48^2 = 17\times113$ … 〃

$b=56$ 〃　$c^2 = 65^2 - 56^2 = 9\times121 = (3\times11)^2$　$c = 33$　$(a, b, c) = (65, 56, 33)$

$b=60$ 〃　$c^2 = 65^2 - 60^2 = 5\times125 = (25)^2$　$c = 25$　a と c の最大公約数が5

$b=64$ 〃　$c^2 = 65^2 - 64^2 = 1\times129$ … 平方数ではない

以上より　$(b, c) = (16, 63), (56, 33), (63, 16), (33, 56)$