2019 藤田医科(推)

1 (1) 最初の12個を $x_1, x_2, \cdots x_{12}$ 残り8個を $y_1, y_2 \cdots y_8$ と表す.

$$\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{12} x_k = 50 \qquad \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8} y_k = 60$$

$$\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{12} x_k^2 - 50^2 = 24 \qquad \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8} y_k^2 - 60^2 = 64$$

20個のデータの平均は $\frac{1}{20}\left(\sum_{k=1}^{12} x_k + \sum_{k=1}^{8} y_k\right) = \frac{1}{20}\left(50\times 12 + 60\times 8\right) = \frac{1080}{20} = \mathbf{54}$

分散は $\frac{1}{20}\left(\sum_{k=1}^{12} x_k^2 + \sum_{k=1}^{8} y_k^2\right) - 54^2 = \frac{1}{20}\left(2524\times 12 + 3664\times 8\right) - 2916 = \mathbf{64}$

(2) $x=0$ が解でないことは明か.

両辺を x^2 で割って

$$x^2 - 24x + 2 - \frac{24}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$ とおくと $t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ だから上式は

$$t^2 - 24t = 0 \qquad \therefore t = 0, 24$$

$t=0$ のとき $x + \frac{1}{x} = 0$ より $x^2 + 1 = 0$ となるが. これを満たす x は存在しない.

$t=24$ のとき $x + \frac{1}{x} = 24$ $\quad x^2 - 24x + 1 = 0 \quad x = 12 \pm \sqrt{144-1} = 12 \pm \sqrt{133}$

このうち最大のものは $x = \mathbf{12 + \sqrt{133}}$

(3) $a>0$ なので無理関数は単調に増加する

したがって $x=-3$ のとき $y=4$, $x=5$ のとき $y=8$ の値をとる

$$4 = \sqrt{-3a+b}, \quad 8 = \sqrt{5a+b}$$

それぞれ2乗して

$$16 = -3a+b, \quad 64 = 5a+b$$

辺々引いて $48 = 8a \quad a = 6, b = 34 \qquad (a, b) = \mathbf{(6, 34)}$

(4) $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\{(k+3)-(k-1)\}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

$T_n = \sum_{k=1}^{n} k^2(k+1) = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$$\frac{S_n}{T_n} = \frac{\frac{1}{4}\cancel{n(n+1)}(n+2)(n+3)}{\frac{1}{4}n^{\cancel{2}}(n+1)^{\cancel{2}} + \frac{1}{6}\cancel{n(n+1)}(2n+1)} = \frac{3n^2+15n+18}{3n^2+3n+4n+2} = \frac{3\cancel{(n+2)}(n+3)}{(3n+1)\cancel{(n+2)}} = \frac{3(n+3)}{3n+1}$$

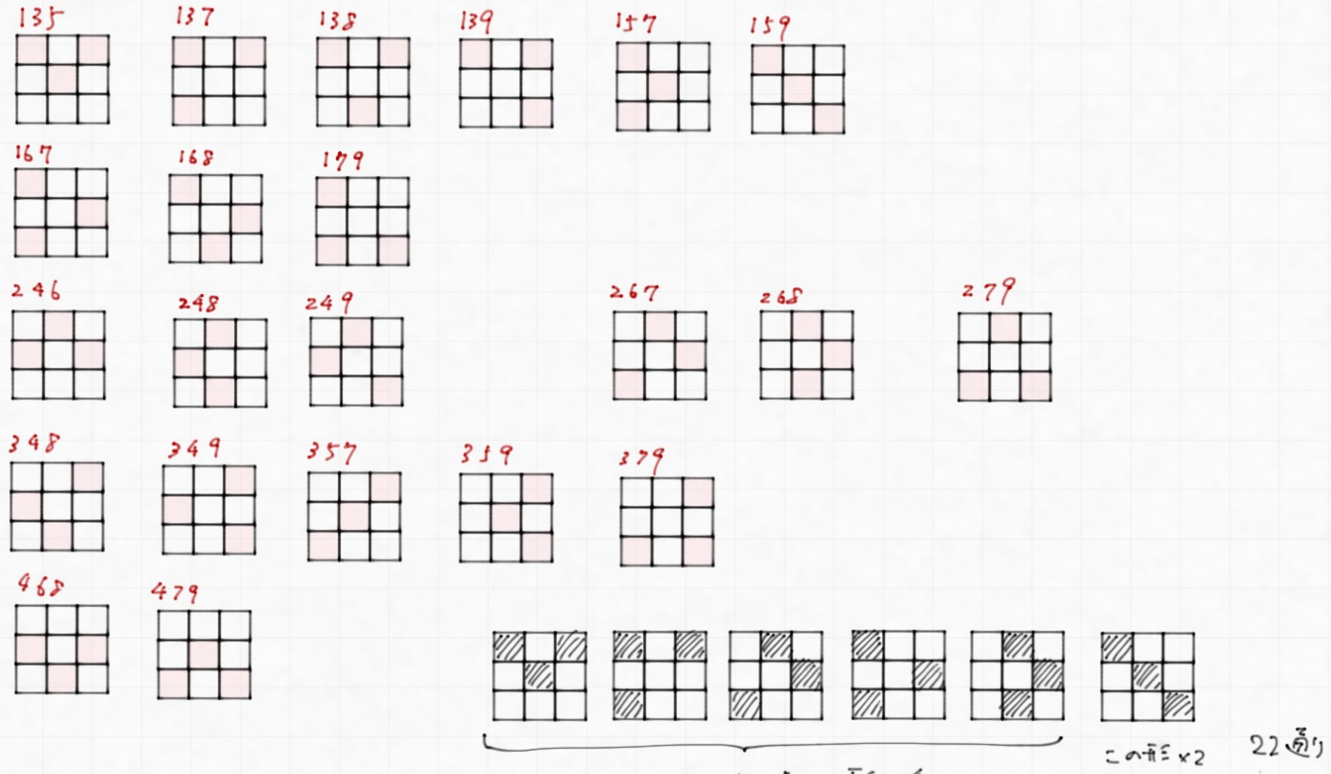
$n=21$ のとき $\frac{S_{21}}{T_{21}} = \frac{3\times\cancel{24}^{3}}{\cancel{64}_{8}} = \mathbf{\frac{9}{8}}$

2019 藤田医科(推)

1 (5)

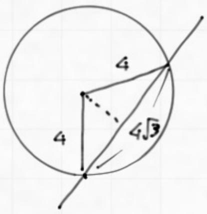
1	2	3
4	5	6
7	8	9

1〜9の番号を振る。このうちの3ヶ所を赤にするのは $_9C_3 = \frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2} = 84$通り



$\frac{22}{84} = \frac{11}{42}$

(6) $x^2-4x+y^2-6y-3=0 \iff (x-2)^2+(y-3)^2=4^2$



中心と直線の距離は $\sqrt{4^2-(2\sqrt3)^2} = 2$

直線を $y=m(x-1)+5$ として $mx-y-m+5=0$ と $(2,3)$ との距離が2 となればよいので

$$\frac{|2m-3-m+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 2 \iff |m+2| = 2\sqrt{m^2+1}$$

両辺を2乗して. $m^2+4m+\cancel{4} = 4m^2+\cancel{4}$ $3m^2-4m=0$ $m=0,\ \frac{4}{3}$

傾きは正とあるので. $m = \frac{4}{3}$

(7) $\int f(x)dx = -(x-5)e^{-x} + \int e^{-x}dx = (-x+4)e^{-x} + C$ (Cは積分定数)

$\int_4^8 f(x)dx = \left[(4-x)e^{-x}\right]_4^8 = 4e^{-8}$

$f(x) = e^{-x} - (x-5)e^{-x} = (6-x)e^{-x}$ $f(8) = 2e^{-8}$

$$\frac{\int_4^8 f(x)dx}{f(8)} = \frac{4e^{-8}}{2e^{-8}} = 2$$

2019 藤田医科(推)

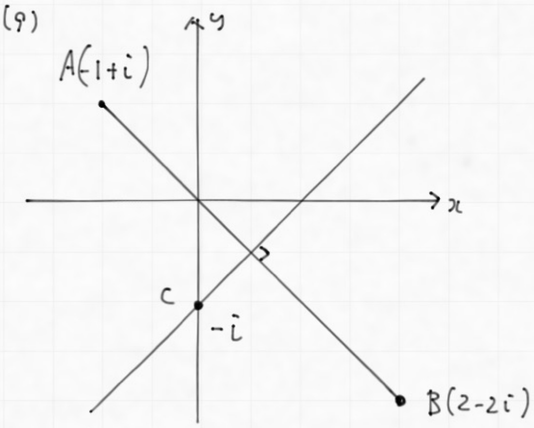
1 (8) $\overrightarrow{AB} = (-3, -10, -4)$, $\overrightarrow{AC} = (-6, 0, -8)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9+100+16} = 5\sqrt{5}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{36+64} = 10$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18 + 0 + 32 = 50$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{125 \cdot 10^2 - 50^2} = 5\sqrt{125-25} = \mathbf{50}$$

(9)



ABの中点は $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Cは この点を通ってABと垂直

$y = 1 \times (x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = x - 1$ …①

$x = 0$のとき$y = -1$だから Cの座標は $-i$

ACの中点は $-\frac{1}{2}$

この点を通って ACと垂直な直線は

$y = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ …②

① ② を連立

$x - 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ 　 $x = \frac{5}{2}$, $y = \frac{3}{2}$

よって A.B.C を通る円の中心は $\mathbf{\frac{5}{2} + \frac{3}{2}i}$

△ABCの外心は
AB, ACの垂直二等分線の交点

(10) $f(x) = 10 + 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{4-2x}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{5(2\sqrt{4x-x^2}+2-x)}{\sqrt{4x-x^2}}$

$2\sqrt{4x-x^2} + 2 - x = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{4x-x^2} = x - 2$

$x \geqq 2$のとき両辺2乗して $4(4x - x^2) = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow 5x^2 - 20x + 4 = 0$ 　 $x = \frac{10+4\sqrt{5}}{5}$

x	0	…	$\frac{10+4\sqrt{5}}{5}$	…	4
$f(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

$\frac{10+4\sqrt{5}}{5} = \alpha$ とすると 　 $5\alpha^2 - 20\alpha + 4 = 0$ より $\alpha^2 - 4\alpha = -\frac{4}{5}$

$f(\alpha) = 10\alpha + 5\sqrt{\frac{4}{5}} = 20 + 8\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = \mathbf{20 + 10\sqrt{5}}$

2019 藤田医科（推）

2

(1) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(2) $$\{f(x)g(x)\}' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ g(x+h) \times \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \times \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

証明終

(3) $$\left\{\frac{1}{f(x)}\right\}' = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h f(x) f(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ -\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \times \frac{1}{f(x) f(x+h)} \right\} = -f'(x) \times \frac{1}{\{f(x)\}^2} = \text{右辺}$$

証明終

2019 藤田医科 (推)

3

(1) $b=2,\ a=17$ とすると $5\times17+7\times2=99$ となり方程式を満たしている

$$\begin{array}{rl} & 5a+7b=99 \\ -) & 5\times17+7\times2=99 \\ \hline & 5(a-17)+7(b-2)=0 \end{array}$$

$5(a-17)+7(b-2)=0 \iff 5(a-17)=-7(b-2)$ …①

①式の左辺は5の倍数，また右辺は7の倍数なので

$5(a-17)=-7(b-2)=5\times7\times n$ （nは整数）

と表すことができ．

$$\begin{cases} a-17=7n \\ b-2=-5n \end{cases} \iff \begin{cases} a=17+7n \\ b=2-5n \end{cases} \quad \cdots②$$

a, bは自然数だから $a\geqq1,\ b\geqq1$ これに②を代入して

$17+7n\geqq1$ ， $2-5n\geqq1$ $\iff -\frac{16}{7}\leqq n\leqq\frac{1}{5}$ $-2\leqq n\leqq0$ ..③

③を満たす整数は $n=-2,-1,0$ の3つであり，このとき a, b は

$(a, b)=$ **$(17, 2), (10, 7), (3, 12)$**

(2) $5a+7b=N$ と表す

$b=1$ とする aを$1, 2, 3$.. とすれば $N=12, 17, 22, \cdots$

これは 12 以上で 5で割った余りが2となるもの全て

$b=2$	〃	〃	$N=19, 24, 29\ldots$	19	〃	〃	4	〃
$b=3$	〃	〃	$N=26, 31, 36\ldots$	26	〃	〃	1	〃
$b=4$	〃	〃	$N=33, 38, 43\ldots$	33	〃	〃	3	〃
$b=5$	〃	〃	$N=40, 45, 50\ldots$	40	〃	〃	0	〃

以上より，36 以上の数を $5a+7b$ の形に表すことができる．

よって題意が成り立つことが示された．

(3) (2)の考察より 36以上の値は $5a+7b$ の形に表すことができる

そこで $5a+7b=35$ となる自然数 a, b の組みが存在しないことを示す．

$5a+7b=35$ を満たす (a, b) が存在すると仮定すると．

$7b=35-5a\leqq35-5=30$ $b\leqq\frac{30}{7}<5$

よって $b=1, 2, 3, 4$ のいずれか

$b=1$ のとき $a=\frac{28}{5}$ $b=2$ のとき $a=\frac{21}{5}$ $b=3$ のとき $a=\frac{14}{5}$，$b=4$ のとき $a=\frac{7}{5}$

いずれも aは自然数とはならないので，$5a+7b=35$ を満たす自然数の組みは存在しない

以上より，題意の最小のnは **36**