日本大学2019

1 (1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{11}$ の正負を考える

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5+2\sqrt{6}$ $\quad \sqrt{11}^2 = 11$

$5+2\sqrt{6}-5$ と $11-5$ の大小を考える

$(2\sqrt{6})^2 = 24 \quad 6^2 = 36$

よって $\sqrt{2}+\sqrt{3} < \sqrt{11}$ $\quad \sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{11} < 0$ $\quad \sqrt{a^2} = |a| = -a = \sqrt{11}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ 5

(2) $\{\}, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}, \{A, B\} \dots \quad \{A, B, C\}, \dots \quad \{A, B, C, D\}$

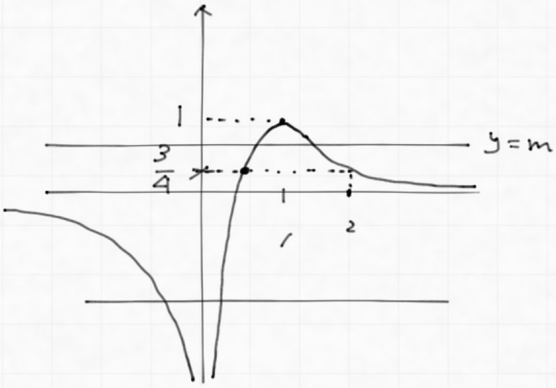
$1+4+{}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4 = \mathbf{16}$ ($=2^4$ です)

(3) $v=6, \ e=12, \ f=8 \quad v-e+f = 6-12+8 = \mathbf{2}$ (有名定理)

正十二面体の各面は正五角形だから **5** こずつ頂点をもつ

(4) $mx^2 = 2x-1 \quad x=0$ は解ではないので $x \neq 0$

$m = \dfrac{2x-1}{x^2} = f(x) \qquad f'(x) = \dfrac{2x^{\cancel{2}} - (2x-1)\times 2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}\,3}} = \dfrac{2(1-x)}{x^3}$



$m < 0, \quad \dfrac{3}{4} \leqq m < 1$

日本大学2019

(5) $x \leqq y \leqq z$ と限定して考える.

条件より $\frac{1}{5}(5+x+y+z+10)=y \iff 4y=x+z+15$

$5 \leqq x \leqq y$, $y \leqq z \leqq 10$

$5 \leqq y \leqq 10$ だから.

$y=5$ のとき. $x+z=5$ … 不適、 ($\because$ $x+z \geqq 5+5=10$.)

$y=6$ 〃 $x+z=9$ … 〃 ($\because$ $x+z \geqq 5+6=11$)

$y=7$ 〃 $x+z=13$ $(x, z)=(5, 8), (6, 7)$

$y=8$ 〃 $x+z=17$ $(x, z)=(7, 10), (8, 9)$

$y=9$ 〃 $x+z=21$ … 不適. ($\because$ $x+z \leqq 10+10=20$.)

(x, y, z) の組み合わせは $(5, 7, 8), (6, 7, 7), (7, 8, 10), (8, 8, 9)$

(x, y, z) の順番を考えて. $3! \times 2 + 3 \times 2 = 18$ 通り

日本大学2019

II

(1) $\log_4(16^x-12)=\log_4\{4\cdot(16^{x-\frac12}-3)\}=1+\log_4(16^{x-\frac12}-3)=x+1$

$16^{x-\frac12}-3=4^x$

$2^{4x-2}-2^{2x}-3=0$ ($2^{2x}=X$ とする, $X>0$)

$\frac14X^2-X-3=0 \Leftrightarrow (X-6)(X+2)=0 \Leftrightarrow X=6,-2$

$X>0$ だから $X=6=2^{2x}$ $2x=\log_2 6$ $\therefore\ x=\frac{\log_2 6}{2}$

(2) $x=2+3i$ も解 $2+3i+(2-3i)=4$, $(2+3i)(2-3i)=4+9=13$.

$x=2\pm3i$ を解にもつ2次方程式は $x^2-4x+13=0$.

これで、3次式を割る

$$\begin{array}{ccc|cccc} & & & 1 & 2 & & \\ \hline 1 & -4 & 13 & 1 & -2 & p & q \\ & & & 1 & -4 & 13 & \\ \hline & & & & 2 & p-13 & q \\ & & & & 2 & -8 & 26 \\ \hline & & & & & p-5 & q-26 \end{array}$$

$(x^3-2x^2+px+q)=(x^2-4x+13)(x+2)$
$+(p-5)x+q-26$

$p=\mathbf{5}$. $q=\mathbf{26}$

(3) $-2-\sqrt3=\tan\alpha$, $-\sqrt3=\tan\beta$ として

$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\cancel{-\sqrt3}+2+\cancel{\sqrt3}}{1+2\sqrt3+3}=\frac{1}{2+\sqrt3}=2-\sqrt3$

$\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{4-2\sqrt3}{1-4-3+4\sqrt3}=\frac{2-\sqrt3}{2\sqrt3-3}\times\frac{3+2\sqrt3}{3+2\sqrt3}=\frac{6-6-3\sqrt3+4\sqrt3}{3}=\frac{1}{\sqrt3}$

$2\theta=30^\circ$ $\theta=\mathbf{15^\circ}$

(4) $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}+\frac13\times\left(\frac43\right)^n$

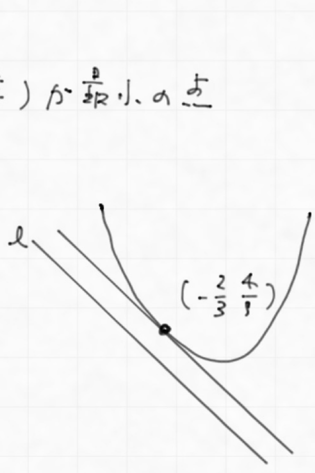
$\frac{a_n}{3^n}=\frac{10}{3}+\frac{4}{3\cancel{9}}\times\frac{\left(\frac43\right)^{n-1}-1}{\cancel{\frac43-1}}=\left(\frac43\right)^n+2$ $a_n=\mathbf{4^n+2\cdot3^n}$ $n=1$ も OK

(5) $y=-\left(\frac43x+1\right)=-\frac43x-1$

$(x^2)'=2x=-\frac43$ となるのは $x=-\frac23$. $\left(-\frac23,\frac49\right)$ が最小の点

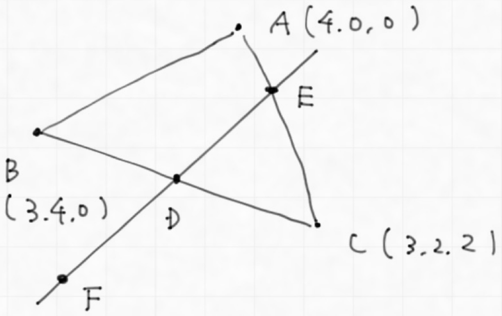
ℓ とのきょりは

$\frac{\left|\frac43\left(-\frac23\right)+\frac49+1\right|}{\sqrt{\left(\frac43\right)^2+1^2}}=\frac35\times\frac59=\mathbf{\frac13}$



日本大学2019

[1]



(1) DはB, Cの中点だから (3, 3, 1)

EはCAを2:1に内分

$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} = \left(\frac{11}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$\overrightarrow{DE} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

直線DE $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{7}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ (tはパラメーター)

これと $z=0$ の交点 $0 = 1 - \frac{1}{3}t$ より $t=3$.

$(x, y, z) = \mathbf{(5, -4, 0)}$

(2) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ 両方に垂直なベクトルとして $\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$ これを法線ベクトルとして.

平面ABCは $4(x-4) + 1\cdot(y-0) + 1\cdot(z-0) = 0$ $\quad 4x + y + z - 16 = 0$

$\overrightarrow{OH} \perp$ 平面ABC だから $\overrightarrow{OH} = k\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$ これが平面上にあるので. $16k + k + k - 16 = 0$ $k = \frac{8}{9}$

$H\left(\mathbf{\frac{32}{9}}, \mathbf{\frac{8}{9}}, \mathbf{\frac{8}{9}}\right)$

(3) $|\overrightarrow{OH}| = \frac{8}{9}\sqrt{4^2+1^2+1^2} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{17}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1+4+4} = 3$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1 + 8 = 9$

$\triangle ABC = \frac{1}{2}\sqrt{17\times 3^2 - 9^2} = \frac{3}{2}\sqrt{17-9} = 3\sqrt{2}$

$OBDF = 3\sqrt{2} \times \frac{8\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{16}{3}}$

日本大学2019

IV (1) $b=f(a)=a$ より $-a^2+6a-5=a \iff a^2-5a+5=0$　　$a=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$

解と係数の関係より　$p+q=5,\ pq=5$

$$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=5^2-2\cdot5=\mathbf{15}$$

$$p^3+q^3=(p+q)(p^2-pq+q^2)=5\times(15-5)=\mathbf{50}$$

(2) $b=f(a),\ a=f(b)$

$$a=f(f(a))=-(-a^2+6a-5)^2+6(-a^2+6a-5)-5$$

$$a=\underline{-a^4}-\underline{36a^2}-25+\underline{12a^3}-\underline{10a^2}+60a-\underline{6a^2}+36a-30-5$$

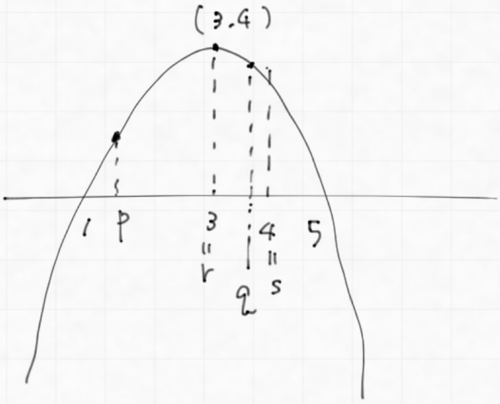
$$a^4-12a^3+52a^2-95a+60=0$$

$$(a^2-5a+5)(a^2-7a+12)=0.$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & & 1 & -7 & 12 & \\
\hline
1\ -5\ 5 & 1 & -12 & 52 & -95 & 60 \\
 & 1 & -5 & 5 & & \\
\hline
 & & -7 & 47 & -95 & \\
 & & -7 & 35 & -35 & \\
\hline
 & & & 12 & -60 & 60 \\
 & & & 12 & -60 & 60 \\
\hline
 & & & & & 0
\end{array}$$

$a^2-7a+12=0$ の解は　$a=3.4$　　$r=\mathbf{3},\ s=\mathbf{4}$

(3) $f(x)=-(x-3)^2+4$



$$\int_p^3 -x^2+6x-5\,dx+\int_q^4 -x^2+6x-5\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2-5x\right]_p^3+\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2-5x\right]_q^4$$

$$=-9+27-15-\frac{64}{3}+48-20$$

$$+\frac{1}{3}(p^3+q^3)-3(p^2+q^2)+5(p+q)$$

$$=31-\frac{64}{3}+\frac{1}{3}\times50-3\times15+5\times5=-\frac{14}{3}+11=\mathbf{\frac{19}{3}}$$

日本大学2019

V

(1) $\left(\frac{10}{20}\right)^5 \times \left(\frac{10}{20}\right)^5 \times {}_{10}C_5 = \frac{{}_{10}C_5}{2^{10}} = \frac{\cancel{10}^{2}\cdot 9\cdot \cancel{8}^{2}\cdot 7\cdot \cancel{6}}{\cancel{2^{10}}_{2^8}\cdot \cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = \frac{63}{256}$

15
$\cancel{18}-k \geq \cancel{4k}+\cancel{4}$

(2) $p_k = \left(\frac{10}{50}\right)^k\left(\frac{40}{50}\right)^{18-k} {}_{18}C_k = \frac{4^{18-k}}{5^{18}}\times {}_{18}C_k$

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{\frac{4^{17-k}}{5^{18}}\ {}_{18}C_{k+1}}{\frac{4^{18-k}}{5^{18}}\times{}_{18}C_k} = \frac{\cancel{k!}\cancel{(18-k)!}\,\cancel{18!}}{4\cdot \cancel{18!}\,\cancel{(k+1)!}\,\cancel{(17-k)!}} = \frac{18-k}{4(k+1)} \geq 1 \qquad k \leq \frac{14}{5} = 2.8$$

よって

$p_1 < p_2 < p_3 > p_4 > p_5 > \cdots$ $k=3$で最大となる

(3) $q_k = \frac{{}_{10}C_k \times {}_{40}C_{18-k}}{{}_{50}C_{18}}$ $(k \leq 10)$

$$\frac{q_{k+1}}{q_k} = \frac{{}_{10}C_{k+1}\times{}_{40}C_{17-k}}{{}_{10}C_k\times{}_{40}C_{18-k}} = \frac{\cancel{k!}\,\cancel{(10-k)!}\,\cancel{10!}\,\cancel{(18-k)!}\,\cancel{(22+k)!}\,\cancel{40!}}{\cancel{10!}\,\cancel{(k+1)!}\,\cancel{(9-k)!}\,\cancel{40!}\,\cancel{(17-k)!}\,\cancel{(23+k)!}}$$

$$= \frac{(10-k)(18-k)}{(k+1)(23+k)} \geq 1 \qquad k \leq \frac{157}{52} = 3.\ldots$$

よって

$q_1 < q_2 < q_3 < q_4 > q_5 > q_6 > \cdots$ $k=4$で最大となる