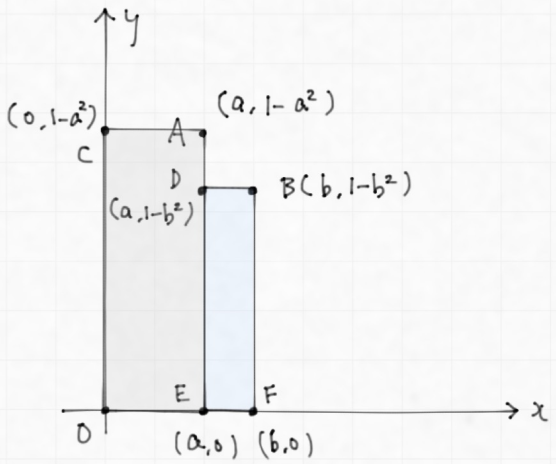
神戸大学2018後

1



(1) 左図より

$$S = a(1-a^2) + (b-a)(1-b^2)$$

$$= \cancel{a} - a^3 + b - \cancel{a} - b^3 + ab^2$$

$$= \boldsymbol{ab^2 + b - a^3 - b^3}$$

(2) bを固定し、Sをaの3次式と考える

$-a^3 + b^2a + b - b^3 = f(a)$ とおく.

$$f'(a) = -3a^2 + b^2 = (b+\sqrt{3}a)(b-\sqrt{3}a)$$

$f'(a) = 0$ となるのは $a = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}b$ のときで

$0 \leqq a < b$ の範囲の $f(a)$ の増減は次のようになる.

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}b$	$\cdots$	b
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よってSが最大となるのは $\boldsymbol{a = \frac{1}{\sqrt{3}}b}$ のとき

(3) $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}b\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}}b^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}b^3 + b - b^3 = \left(\frac{2}{9}\sqrt{3} - 1\right)b^3 + b = g(b)$ とおく

$$g'(b) = \left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - 3\right)b^2 + 1$$

$g'(b) = 0$ となるのは $b^2 = \frac{-3}{2\sqrt{3}-9} = \frac{9+2\sqrt{3}}{23}$ より $b = \pm\sqrt{\frac{9+2\sqrt{3}}{23}}$ のとき.

$0 < b \leqq 1$ の範囲での $g(b)$ の増減は下のようになる

b	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{9+2\sqrt{3}}{23}}$	$\cdots$	1
$g'(b)$		$+$	0	$-$	
$g(b)$		$\nearrow$		$\searrow$	

したがって

$$M = g\left(\sqrt{\frac{9+2\sqrt{3}}{23}}\right) = \frac{\overset{-1}{\cancel{2\sqrt{3}-9}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{9-2\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{\frac{9+2\sqrt{3}}{23}} + \sqrt{\frac{9+2\sqrt{3}}{23}}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{9+2\sqrt{3}}{23}}$$

$$M^2 = \frac{4(9+2\sqrt{3})}{9 \cdot 23}$$

ここで $\sqrt{3}^2 = 3 < 1.733^2 = 3.003..$

$$M^2 < \frac{4(9+1.733)}{207} = 0.207.. < \frac{1}{4}$$

$\therefore S \leqq M < \frac{1}{2}$ であり $S < \frac{1}{2}$ が示された

神戸大学2018後

2 (1) $f(x)=\dfrac{2e^{3x}}{e^{2x}+1}$

$$f'(x)=\frac{6e^{3x}(e^{2x}+1)-2e^{3x}\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{2e^{3x}(e^{2x}+3)}{(e^{2x}+1)^2}>0 \quad (\because e^{2x}>0,\ e^{3x}>0)$$

よって $f(x)$ は単調に増加し、$a<b$ のとき $f(a)<f(b)$ が成り立つ。

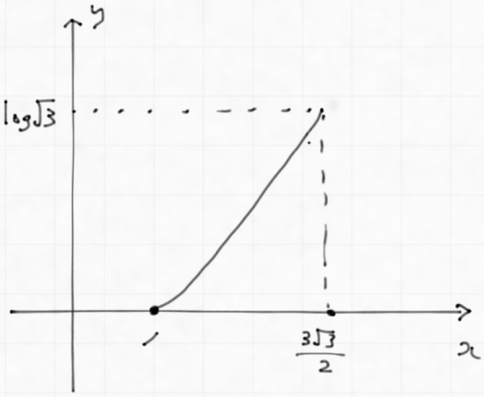
$$f(\log\sqrt{3})=\frac{2e^{3\log\sqrt{3}}}{e^{2\log\sqrt{3}}+1}=\frac{2\cdot\sqrt{3}^3}{\sqrt{3}^2+1}=\mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

(2) $g(x)=y$ とおくと、$g(x)$ は $f(x)$ の逆関数なので $x=f(y)$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2e^{3y}(e^{2y}+3)}{(e^{2y}+1)^2}$$

$f(y)=\dfrac{2e^{3y}}{e^{2y}+1}=1$ を解くと $2e^{3y}=e^{2y}+1$ $(e^y-1)(2e^{2y}+e^y+1)=0$ $\therefore y=0$

また (1)より $f(y)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ となるのは、$y=\log\sqrt{3}$ のとき。



以上より

$$\int_1^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} g(x)\,dx=\int_0^{\log\sqrt{3}} y\,f'(y)\,dy$$

$$=\Big[y f(y)\Big]_0^{\log\sqrt{3}}-\int_0^{\log\sqrt{3}} f(y)\,dy$$

$$=\log\sqrt{3}\,f(\log\sqrt{3})-\int_0^{\log\sqrt{3}}\frac{2e^{3y}}{e^{2y}+1}\,dy=(*)$$

ここで〜〜部について、$e^y=t$ とおくと、$\dfrac{dt}{dy}=e^y$.

y	$0\to\log\sqrt{3}$
t	$1\to\sqrt{3}$

$$\text{〜〜部}=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2t^{\cancel{3}\,2}}{t^2+1}\cdot\frac{1}{\cancel{t}}\,dt=\int_1^{\sqrt{3}} 2-\frac{2}{t^2+1}\,dt=2(\sqrt{3}-1)-\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2}{t^2+1}\,dt$$

ここで≈≈部について $t=\tan\theta$ とおくと $\dfrac{dt}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

t	$1\to\sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{3}$

$$\text{≈≈部}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{6}$$

よって

$$(*)=\log 3^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}-2(\sqrt{3}-1)+\frac{\pi}{6}=\mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{4}\log 3+\frac{\pi}{6}-2(\sqrt{3}-1)}$$

神戸大学2018後

3 (1) $A_{n+6}-A_n = 2^{n+6}+(n+6)^2-(2^n+n^2) = 2^n(2^6-1)+12n+36 = 3(2^n\cdot 21+4n+12)$

よって $A_{n+6}-A_n$ は3で割り切れる。

(2) $A_1 = 2^1+1^2 = 3 \equiv 0 \pmod 3$　　$A_4 = 2^4+4^2 = 32 \equiv 2 \pmod 3$

$A_2 = 2^2+2^2 = 8 \equiv 2 \pmod 3$　　$A_5 = 2^5+5^2 = 57 \equiv 0 \pmod 3$

$A_3 = 2^3+3^2 = 17 \equiv 2 \pmod 3$　　$A_6 = 2^6+6^2 = 100 \equiv 1 \pmod 3$

(1)より、$A_{n+6} \equiv A_n \pmod 3$ が成り立つので、$A_1 \equiv A_7 \equiv A_{13} \equiv \cdots \equiv 0$ などが成り立つ。

したがって $a_n=1$ を満たすのは $a_6, a_{12}, a_{18}, \cdots$ で、$2018 = 6\times 336+2$ だから

$a_6, a_{12}, a_{18}, \cdots a_{2016}$ の **336** 個

(3) $B_1 = 3^1+1^3 = 4 \equiv 0 \pmod 4$

$B_2 = 3^2+2^3 = 17 \equiv 1 \pmod 4$

$B_3 = 3^3+3^3 = 54 \equiv 2 \pmod 4$

$B_4 = 3^4+4^3 = 145 \equiv 1 \pmod 4$

$B_5 = 3^5+5^3 = 368 \equiv 0 \pmod 4$

80

$B_{n+4}-B_n = 3^{n+4}+(n+4)^3-(3^n+n^3) = 3^n(3^4-1)+12n^2+48n+64 = 4(20\cdot 3^n+3n+12n+21)$

となるので $B_{n+4}-B_n \equiv 0 \pmod 4$.

よって $B_{n+4} \equiv B_n \pmod 4$

$b_n=2$ を満たすのは、$n=3, 7, 11, 15, \cdots$

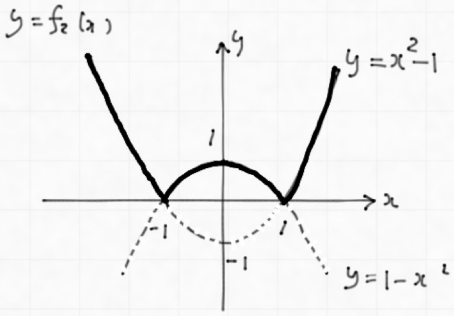
$2018 = 4\cdot 503+3+3$ だから　$B_3 \equiv B_7 \equiv B_{11} \equiv \cdots \equiv B_{2015} \equiv 0 \pmod 4$

$B_{4\cdot 0+3} \equiv B_{4\cdot 1+3} \equiv \cdots \equiv B_{4\cdot 503+3} \equiv 0 \pmod 4$

$b_n=2$ を満たす n の個数は **504** 個

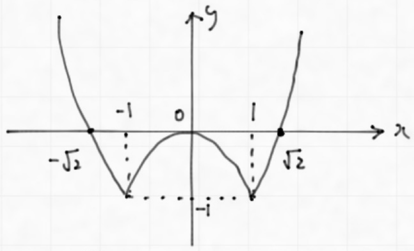
神戸大学2018後

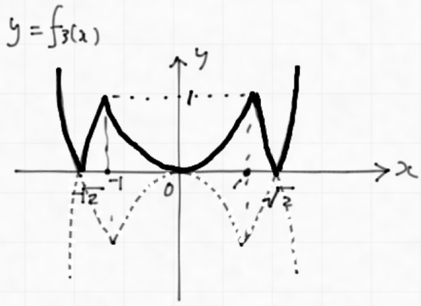
4 (1) $f_2(x)=|f_1(x)-1|=|x^2-1|=|(x+1)(x-1)|$



$f_3(x)=|f_2(x)-1|=\left||x^2-1|-1\right|$

$f_2(x)$ のグラフを y 軸方向に -1 平行移動したグラフは左下のようになる。このグラフの $y<0$ の範囲を x 軸について折り返したグラフが $f_3(x)$ のグラフになるので $y=f_3(x)$ のグラフは右のようになる





(2) 数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき $f_1(x)=x^2$ は $x=0$ のとき $f_1(x)=0$ であり、$0\leqq f_1(x)\leqq 1$ を満たす

$x\geqq\sqrt{1-1}=0$ のとき、$f_1(x)=x^2=x^2-(1-1)$ を満たす。

(ii) $n=k$ のとき $f_k(x)$ が

$0\leqq x\leqq\sqrt{k-1}$ のとき、$0\leqq f_k(x)\leqq 1$, $x\geqq\sqrt{k-1}$ において $f_k(x)=x^2-k+1$ を満たすと仮定する。

このとき $f_k(x)-1$ は、$0\leqq x\leqq\sqrt{k-1}$ で $-1\leqq f_k(x)-1\leqq 0$ を満たし、

$x\geqq\sqrt{k-1}$ で $f_k(x)-1=x^2-k=(x-\sqrt{k})(x+\sqrt{k})$ だから、

$\sqrt{k-1}\leqq x\leqq\sqrt{k}$ のとき、$(\sqrt{k-1})^2-k=-1\leqq f_k(x)-1\leqq 0$ を満たし、

$x\geqq\sqrt{k}$ のとき、$f_k(x)-1\geqq 0$ を満たす。

したがって $f_{k+1}=\begin{cases}1-f_k(x) & (0\leqq x\leqq\sqrt{k})\\ f_k(x)-1=x^2-k & (x\geqq\sqrt{k})\end{cases}$

となる。またこのとき、$0\leqq x\leqq\sqrt{k}$ のとき、$0\leqq 1-f_k(x)\leqq 1$ が成立し、

$x\geqq\sqrt{k}$ のとき $f_{k+1}(x)=x^2-\{(k+1)-1\}$ も成り立っている。

以上 (i)(ii) より、数学的帰納法により、題意は示された。

(3) $S_n=\int_{-\sqrt{n-1}}^{\sqrt{n-1}} f_n(x)\,dx = 2\int_0^{\sqrt{n-1}} f_n(x)\,dx$ （∵ $f_n(-x)=f_n(x)$ であり $f_n(x)$ は偶関数）

$S_{n+1}=\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} f_{n+1}(x)\,dx = \int_0^{\sqrt{n}}|f_n(x)-1|\,dx = 2\int_0^{\sqrt{n}} 1-f_n(x)\,dx = 2\int_0^{\sqrt{n-1}}1-f_n(x)\,dx + 2\int_{\sqrt{n-1}}^{\sqrt{n}}1-f_n(x)\,dx$

$=2\sqrt{n-1}-S_n+2\int_{\sqrt{n-1}}^{\sqrt{n}}-x^2+n\,dx = 2\sqrt{n-1}-S_n+2\left[-\frac{1}{3}x^3+nx\right]_{\sqrt{n-1}}^{\sqrt{n}}$

$=2\sqrt{n-1}-S_n-\frac{2}{3}n\sqrt{n}+2n\sqrt{n}+\frac{2}{3}(n-1)\sqrt{n-1}-2n\sqrt{n-1} = -S_n+\frac{4}{3}n\sqrt{n}-\frac{4}{3}n\sqrt{n-1}+\frac{4}{3}\sqrt{n-1}$

$S_n+S_{n+1}=\frac{4}{3}\left(n\sqrt{n}-n\sqrt{n-1}+\sqrt{n-1}\right)$

神戸大学2018後

(1) $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt - x$ とおく

$F'(x)=f(x)-1=\dfrac{2-e^x}{e^x+1}$

$F'(x)=0$となるのは $e^x=2$ すなわち $x=\log 2$ のときで.

$x \geqq 0$ における$F(x)$の増減は右のようになる

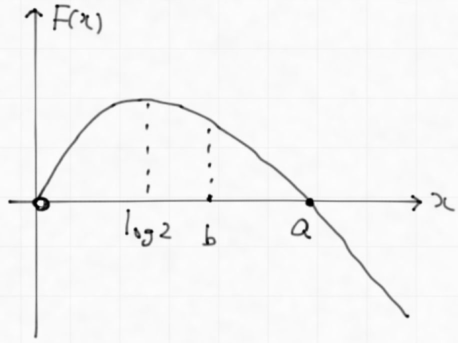
x	0	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$
$F'(x)$		$+$	0	$-$
$F(x)$		↗		↘

$F(0)=\int_0^0 f(t)\,dt - 0 = 0$

$F(x)=\int_0^x \dfrac{3}{e^t+1}\,dt - x \leqq \int_0^x \dfrac{3}{e^t}\,dt - x = \left[-3e^{-t}\right]_0^x - x = -3e^{-x}+3-x$

ここで $\lim_{x\to\infty}(-3e^{-x}+3-x)=-\infty$ だから $\lim_{x\to\infty}F(x)=-\infty$

以上より $F(x)$ のグラフは右のようになり.



$x>0$ の範囲で $F(x)=0$ となるxが唯1つ存在する. これをaとすると $a>0$の範囲で $\int_0^a f(t)\,dt=a$ を満たすxが唯1つ存在することが示された.

(2) $G(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ とおく.

$G'(x)=f(x)$ $\quad G''(x)=\dfrac{-3e^x}{(e^x+1)^2}<0$

$x>0$において $G'(x)>0$だから $G(x)$は単調に増加し. $x \leqq a$において $G(x)\leqq G(a)$

$\therefore\ G(a)-G(x)=\int_0^a f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt \geqq 0$

$x<a$のとき.

開区間 (a, x) において$G(x)$は微分可能かつ閉区間 $[a, x]$ で連続だから平均値の定理より, $\dfrac{G(a)-G(x)}{a-x}=G'(c)$, $x<c<a$

を満たすcが存在する. $G''(x)<0$より. $G'(c)$は単調に減少し. $b\leqq x<c$より $G'(b)>G'(c)$

よって $G(a)-G(x)<G'(b)(a-x)$ が成り立ち. これより

$\int_0^a f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt < f(b)(a-x)$ が成り立つことが示された. …①

$x=a$のとき. $\int_0^a f(t)\,dt - \int_0^a f(t)\,dt = 0$. $f(b)(a-a)=0$ だから不等では成立する …②

①② より $\int_0^a f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt \leqq f(b)(a-x)$ が成り立つことが示された

神戸大学2018後

(3) $b \leqq x_n < a$ を数学的帰納法で示す.

(i) $n=1$ のとき　$x_1 = b$ だから　$b \leqq x_1 < a$ は成り立つ.

(ii) $n=k$ のとき　$b \leqq x_k < a$ が成り立つと仮定する.

このとき (1) より.　$F(x_k) > 0 \iff \int_0^{x_k} f(t)\,dt - x_k > 0 \iff x_{k+1} - x_k > 0$

(2) より　$G(x_k) < G(a) \iff x_{k+1} < a$

よって　$b \leqq x_k < x_{k+1} < a$ が成り立つ.

(i)(ii) より　全てのnについて　$\log 2 < x_n < a$ が成り立つ.

次に

$$a - x_n = \int_0^a f(t)\,dt - \int_0^{x_{n-1}} f(t)\,dt \leqq f(b)(a - x_{n-1})$$

$$= f(b)\left\{\int_0^a f(t)\,dt - \int_0^{x_{n-2}} f(t)\,dt\right\} \leqq f(b)^2 (a - x_{n-2}) \leqq \cdots \leqq f(b)^{n-1}(a-b)$$

$x_n < a$ だから　$a - x_n > 0$. であり

$$0 < a - x_n < f(b)^{n-1}(a-b)$$

(2) より

$f(x)$ は単調に減少するので　$f(b) < f(\log 2) = \dfrac{3}{2+1} = 1$ だから

$\lim_{n\to\infty} f(b)^{n-1}(a-b) = 0$. なので. はさみうちの原理より.　$\lim_{n\to\infty}(a - x_n) = 0$.

よって $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ が示された.