長崎大学2019

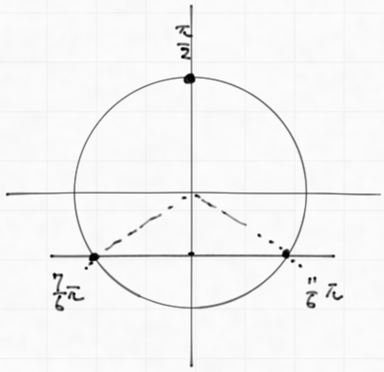
1

(1) $y=\cos^2 x-\sin x = 1-\sin^2 x-\sin x = -\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$

$0 \leqq x < 2\pi$のとき　$-1 \leqq \sin x \leqq 1$だから

$\sin x=-\frac{1}{2}$のとき最大　yの最大値は $\mathbf{\frac{5}{4}}$　そのときのxは　$x=\mathbf{\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi}$

$\sin x=1$のとき最小　yの最小値は $\mathbf{-1}$　そのときのxは　$x=\mathbf{\frac{\pi}{2}}$



(2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}$ より　$3y+3x=2xy \iff \left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4} \iff (2x-3)(2y-3)=9$

$(2x-3, 2y-3)=(1,9),(3,3),(9,1),(-1,-9),(-3,-3),(-9,-1)$

$(x,y)=(2,6),(3,3),(6,2),(1,-3),(0,0),(-3,1)$

x,yは自然数だから　$(x,y)=\mathbf{(2,6),(3,3),(6,2)}$

(3) $n \geqq 2$のとき

$$a_n = a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^k+6k^2+4k-1) = 1+2\times\frac{2^{n-1}-1}{2-1}+(n-1)n(2n-1)+2(n-1)n-(n-1)$$

$$=2^n\cancel{-1}+2n^3-3n^2+n+2n^2-2n-n\cancel{+1} = 2^n+2n^3-n^2-2n$$

$n=1$とすると　$a_1=2^1+2-1-2=1$　となるので上の結果は$n=1$でも成り立つ。

以上より。　$a_n=\mathbf{2^n+2n^3-n^2-2n}$

(4) $\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$ より　$\vec{c}=\mathbf{-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}}$

$3|\vec{c}|=6k$ より　$|\vec{c}|^2=4k^2$ に上の式を代入。

$\left|\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right|^2=4k^2 \iff \frac{1}{9}\times(6k)^2+\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{9}(3k)^2=4k^2$

$\iff 4k^2+\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+4k^2=4k^2 \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=\mathbf{-9k^2}$

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-9k^2}{6k\cdot 3k}=-\frac{1}{2}$　$\theta=\mathbf{\frac{2}{3}\pi}$

長崎大学2019

2

(1) $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-1$ だから、α,βを2解にもつ2次方程式の1つは、

$$x^2-3x-1=0$$

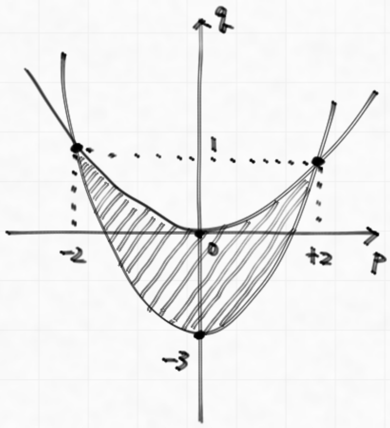
これを解いて $x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ $\alpha\leqq\beta$だから $(\alpha,\beta)=\left(\dfrac{3-\sqrt{13}}{2},\ \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$

(2) (1)と同様に、解と係数の関係を利用して、

$$x^2-px+q=0$$

この2次方程式が実数解を持たねばならないので、判別式をDとして、

$D=p^2-4q\geqq 0$ $\therefore$ $p^2\geqq 4q$



(3) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-3\leqq 0$ より

$(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-3\leqq 0$ $p^2-q-3\leqq 0$ $q\geqq p^2-3$

$q=p^2-3$ と $p^2=4q$ を連立すると $q=1$, $p=\pm 2$

もとめる領域は右図 斜線部(境界含む)

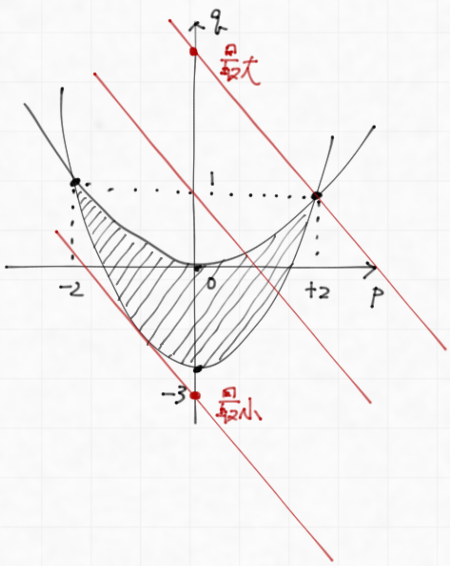
その面積は

$$S=\int_{-2}^{2}\frac{1}{4}p^2-(p^2-3)\,dp=2\int_0^2-\frac{3}{4}p^2+3\,dp=\left[-\frac{1}{2}p^3+6p\right]_0^2=8$$

(4) $\alpha\beta+\alpha+\beta=k$ とおくと、 $k=p+q$

これは p,q 平面における傾き-1の直線と考えることができる。

(p,q)は領域E内の点だから、この直線とEが共有点を持つという条件の下で、直線の切片kの値の範囲を考えればよい。



左図より、最大となるのは $(p,q)=(2,1)$ のときで

$k=2+1=3$

このとき、α,βは、$x^2-2x+1=0$ の解だから $\alpha=\beta=1$

最大値3. $(\alpha=1,\ \beta=1)$

最小となるのは、$p+q=k$ と $q=p^2-3$ が接するときで、

$\dfrac{dq}{dp}=2p=-1$ となることから、$p=-\dfrac{1}{2}$, $\left(q=-\dfrac{11}{4}\right)$

このとき $k=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{11}{4}=-\dfrac{13}{4}$

α,βは $x^2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{11}{4}=0$ の2解で $\alpha=\dfrac{-1-3\sqrt{5}}{4}$, $\beta=\dfrac{-1+3\sqrt{5}}{4}$

最小値 $-\dfrac{13}{4}$ $\left(\alpha=\dfrac{-1-3\sqrt{5}}{4},\ \beta=\dfrac{-1+3\sqrt{5}}{4}\right)$