兵庫医科大学2015

1 (1) α, β は $x^2+x+1=0$ の解だから $\alpha^2+\alpha+1=0,\ \beta^2+\beta+1=0$

$x=0$ は $x^2+x+1=0$ を満たさないので、$\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$

$$\alpha^{-2015}+\alpha^{-2014}+\cdots+\alpha^{-2}+\alpha^{-1}+1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{2014}+\beta^{2015}$$

$$=\alpha^{-2015}(1+\alpha+\alpha^2)+\alpha^{-2012}(1+\alpha+\alpha^2)+\cdots+\alpha^{-5}(1+\alpha+\alpha^2)+\alpha^{-2}(1+\alpha+\alpha^2)$$

$$+\beta^{2013}(\beta^2+\beta+1)+\beta^{2010}(\beta^2+\beta+1)+\cdots+\beta^3(\beta^2+\beta+1)+\beta^2+\beta \quad = -1$$

(別解) α, β は3乗根だから、$\omega^3=1\ (\omega \neq 1)$ を満たす ω を用いて $(\alpha, \beta)=(\omega, \bar{\omega})$ と表せる

$\omega\bar{\omega}=1$ だから、$\alpha^{-2015}=\omega^{-2015}=\bar{\omega}^{3\times 672}\cdot\omega=\omega$ などを利用して…

(2) $f(0+0)=f(0)f(0)e^{-0}=f(0)^2 \qquad f(0)(1-f(0))=0 \qquad \therefore f(0)=1 \ (\because f(x)>0)$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=1$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)e^{-xh}-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}f(x)\times\frac{f(h)e^{-xh}-1}{h}=\lim_{h\to 0}f(x)\frac{\{f(h)-1\}e^{-xh}+e^{-xh}-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{f(x)e^{-xh}\cdot\frac{f(h)-1}{h}+f(x)\times\frac{e^{-xh}-1}{-xh}\times(-x)\right\}$$

$$=f(x)\times e^0-xf(x)=-(x-1)f(x)$$

$$\frac{1}{f(x)}f'(x)=-x+1$$

この式の両辺を x で積分

$$\int\frac{1}{f(x)}f'(x)\,dx=\int -x+1\,dx$$

$$\log|f(x)|=-\frac{1}{2}x^2+x+C \qquad (C\text{は積分定数})$$

$$f(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2+x}e^C \qquad (\because f(x)>0)$$

$f(0)=e^0e^C=1$ より $C=0 \qquad \therefore f(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2+x}$

兵庫医科大学2015

(3) 1 | 1 2 1 | 1 2 3 2 1 | 1 2 3 4 3 2 1 | 1 2 3 4 5 4 3 2 1 | 1 2 . . .

① 第n群には 2n−1 の項が含まれるので 第n群の末項は $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$

$a_n=7$ となるのは 第7群の7項目

第6群の末項は $6^2=36$ 番目の項だから $36+7=$ **43** 番目の項

② 初めて $a_n=m$ となるのは 第m群の m項目 だから $n=(m-1)^2+m=m^2-m+1$

第n群の総和は $1+2+3+\cdots+n+(n-1)+\cdots+1=\frac{1}{2}n(n+1)\times2-n=n^2$

したがって $\sum_{k=1}^{l}a_k=\sum_{k=1}^{m^2-m+1}a_k=\sum_{k=1}^{m-1}k^2+\ 1+2+\cdots+(m-1)+m$

$=\frac{1}{6}(m-1)m(2m-1)+\frac{1}{2}m(m+1)=\frac{1}{6}m\left(2m^2\cancel{-3m}+1+\cancel{3m}+3\right)=\boldsymbol{\frac{1}{3}m(m^2+2)}$

(4) ① $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{8}\iff mn-8m-8n=0\iff(m-8)(n-8)=64$

$(m-8,n-8)=(64,1),(32,2),(16,4),(8,8)$

$(m,n)=$ **(72, 9), (40, 10), (24, 12), (16, 16)**

② $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{p^t}\iff mn-mp^t-np^t=0\iff(m-p^t)(n-p^t)=p^{2t}$

$(m-p^t,n-p^t)=(p^{2t},1),(p^{2t-1},p),\ldots,(p^t,p^t)$

$(m,n)=\boldsymbol{(p^{2t}+p^t,1+p^t),(p^{2t-1}+p^t,p+p^t),\ldots,(2p^t,2p^t)}$

(5) ① $C=-2x^3-7x^2-4x$

右辺を $f(x)$ とおく. $f(x)=-2x^3-7x^2-4x$ $f'(x)=-6x^2-14x-4=-2(3x+1)(x+2)$

$f'(x)=0$ となるのは $x=-2,-\frac{1}{3}$ 増減は右のとおり

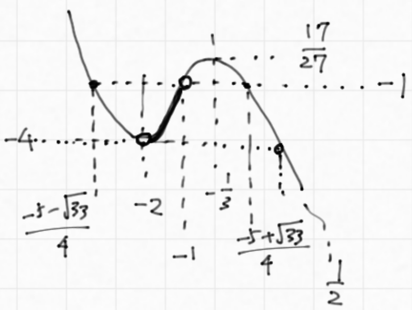
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘		↗		↘

$f(-2)=16-28+8=-4$

$f(-\frac{1}{3})=\frac{2}{27}-\frac{7}{9}+\frac{4}{3}=\frac{17}{27}$

$y=f(x)$ と $y=C$ が異なる3点で交わるとき,

$f(x)=C$ は相異なる3個の実数解をもつ $\boldsymbol{-4<C<\frac{17}{27}}$



② $f(-1)=2-7+4=-1$

$y=f(x)$ と $y=c$ が右図の太線部で交わればよく. $\boldsymbol{-4<c<-1}$

$f(x)=-1$ を解くと $2x^3+7x^2+4x-1=0$

$\iff(x+1)(2x^2+5x-1)=0$ $x=-1,\frac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$

同様に

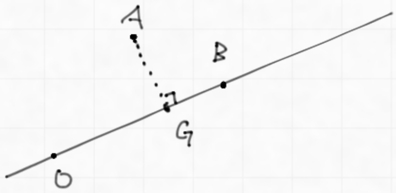
$f(x)=-2$ を解くと $x=-2,\frac{1}{2}$ グラフとの交点を考えて $\boldsymbol{\frac{-5-\sqrt{33}}{4}<\alpha<-2,\ \frac{-5+\sqrt{33}}{4}<\beta<\frac{1}{2}}$

兵庫医科大学2015

2

(1) $\overrightarrow{OG} = k\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$ を連立



$(k\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OB} = 6k + 3 = 0 \quad k = -\frac{1}{2}$

$|\overrightarrow{OG}| = |-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OB}| = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}$

(2) HはOAB上にあるので $\overrightarrow{OH} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ と表せる.

CH⊥OABより $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA} = 0$ かつ $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$ だから.

$(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OA} = \alpha|\overrightarrow{OA}|^2 + \beta\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = 14\alpha - 3\beta - 2 = 0$

$(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OB} = \alpha\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \beta|\overrightarrow{OB}|^2 - \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = -3\alpha + 6\beta + 4 = 0$

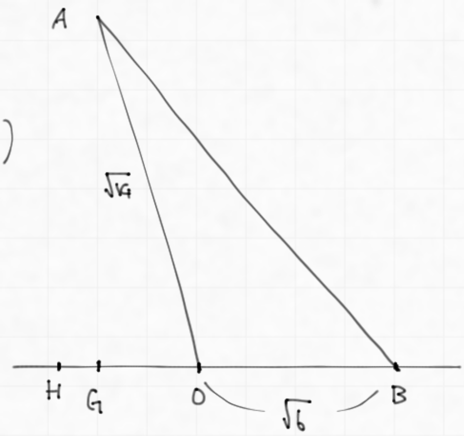
$\alpha = 0,\ \beta = -\frac{2}{3}$

$|\overrightarrow{CH}|^2 = |-\frac{2}{3}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}|^2 = \frac{4}{9}\times 6 + 3 + \frac{4}{3}(-4) = \frac{1}{3} \qquad |\overrightarrow{CH}| = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$|\overrightarrow{AG}|^2 = |-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 = \frac{1}{4}|\overrightarrow{OB}|^2 + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OA}|^2 = \frac{3}{2} - 3 + 14 = \frac{25}{2} \qquad |\overrightarrow{AG}| = \frac{5}{\sqrt{2}}$

△OABの面積 $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{AG}| = \frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

OABCの体積は $\frac{5\sqrt{3}}{2}\times|\overrightarrow{CH}|\times\frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{5}{6}}$



(3) 外接球を $x^2 + y^2 + z^2 + px + qy + sz = 0$ とおく (∵原点を通る)

A, B, Cを通るので

$$\begin{cases} 4 + 9 + 1 - 2p + 3q + s = 0 \\ 1 + 1 + 4 - p - q - 2s = 0 \\ 1 + 1 + 1 + p + q + s = 0 \end{cases}$$

$9 = s \qquad p + q = -12,\ -2p + 3q = -23 \qquad q = -\frac{47}{5},\ p = -\frac{13}{5}$

外接球は $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{13}{5}x - \frac{47}{5}y + 9z = 0$

$(x - \frac{13}{10})^2 + (y - \frac{47}{10})^2 + (z + \frac{9}{2})^2 = \frac{4403}{100}$

中心 $\boldsymbol{(\frac{13}{10}, \frac{47}{10}, -\frac{9}{2})}$ 半径 $\boldsymbol{\frac{\sqrt{4403}}{10}}$

(4) OABの平面の式は $\overrightarrow{CH} = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ を法線ベクトルとして

$1(x - 0) + 1\cdot(y - 0) - 1\cdot(z - 0) = 0 \iff x + y - z = 0.$

PとOABとのきょりは $\frac{|3 + a - 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|3 + a|}{\sqrt{3}}$

これがCHの長さ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ の半分となればよいので $\frac{|3 + a|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad a = \boldsymbol{-\frac{7}{2},\ -\frac{5}{2}}$

兵庫医科大学2015

3 (1) $m=2$　$(a_1, a_2)=(2, 1)$ のみ　　**$N_2=1$**

$m=3$　$(a_1, a_2, a_3)=(2, 3, 1), (3, 1, 2)$ の2種　　**$N_3=2$**

$m=4$　$1\sim m$ の並べ方は $4!=24$ 通り.

そのうち $a_i=i$ となる i が4つあるものは $(a_1, a_2, a_3, a_4)=(1, 2, 3, 4)$ の1通り

〃　3　〃　存在しない

〃　2　〃　${}_4C_2\times N_2=6$ 通り

〃　1　〃　${}_4C_1\times N_3=4\times 2=8$ 通り.

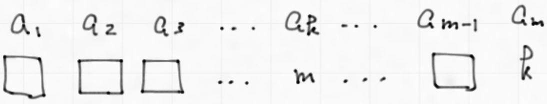
以上より. $24-1-6-8=9$ 通り　　**$N_4=9$**

$m=5$　$m=4$ のときと同様

$$N_5=5!-1-0-{}_5C_3\times N_2-{}_5C_2\cdot N_3-{}_5C_1\cdot N_4$$

$$=120-1-10-20-45=44 \text{ 通り}$$　　**$N_5=44$**

(2) N_m について.

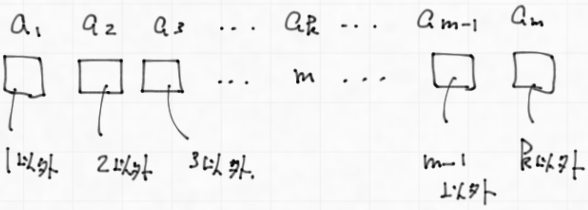


(i) $a_k=m$, $a_m=k$ のとき.

a_k, a_m を除いた $m-2$ 個の順列で,

$a_i\neq i$ を満たすものは N_{m-2} 通り. k の選び方が $m-1$ 通りあるので

$$(m-1)N_{m-2}$$



(ii) $a_k=m$, $a_m\neq k$ のとき

$a_1, a_2, \cdots a_{k-1}, a_{k+1}, \cdots a_m$

に対して. $1, 2, \cdots m-1$ を割りあてるが,

それぞれに対して1つだけ割りあてられない数が

存在する(右図)　その並べ方は N_{m-1}　k の選び方が $m-1$ 通りあるので

$$(m-1)N_{m-1}$$

以上より　$N_m=(m-1)(N_{m-2}+N_{m-1})$

(5) (4)式を $m!$ で割る

$$\frac{N_m}{m!}=\frac{m-1}{m!}N_{m-2}+\frac{m-1}{m!}N_{m-1}=\frac{1}{m}\cdot\frac{N_{m-2}}{(m-2)!}+\frac{m-1}{m}\frac{N_{m-1}}{(m-1)!}$$

$\frac{N_m}{m!}=M_m$ とおくと　$M_m=\frac{1}{m}M_{m-2}+\frac{m-1}{m}M_{m-1}$ …①

①は

$$M_m-M_{m-1}=-\frac{1}{m}(M_{m-1}-M_{m-2})$$

と変形できる.

$$M_m - M_{m-1} = -\frac{1}{m}(M_{m-1} - M_{m-2}) = \left(-\frac{1}{m}\right)\left(-\frac{1}{m-1}\right)(M_{m-2} - M_{m-3})$$

$$= \cdots = \left(-\frac{1}{m}\right)\left(-\frac{1}{m-1}\right)\left(-\frac{1}{m-2}\right)\cdots \left(-\frac{1}{4}\right)(M_3 - M_2)$$

$$= \frac{(-1)^{m-3}}{m!} \cdot 3! \cdot \left(\frac{N_3}{3!} - \frac{N_2}{2!}\right) = \frac{(-1)^{m-3}}{m!} \times 3! \times \left(\frac{2}{6} - \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^{m-2}}{m!} = \frac{(-1)^{m}}{m!}$$

$$M_m = \sum_{k=3}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{N_2}{2!} = \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} - \left(\frac{-1}{1} + \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} + 1$$

$$\frac{N_m}{m!} = M_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} + 1$$