神戸大学2019後

1 (1) $\tan\frac{7\pi}{12} = \tan\left(\frac{4\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\times 1} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-3+1} = \mathbf{-2-\sqrt{3}}$

(2) m.nは $0<m<n$ を満たす整数だから

$m \geqq 1$ であり $m=\tan\alpha \geqq 1$ より $\alpha \geqq \frac{\pi}{4}$

また $n>m\geqq 1$ より $n\geqq 2$ であり $n=\tan\beta \geqq 2 > \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$ より $\beta > \frac{\pi}{3}$

よって $\alpha+\beta > \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3} = \frac{7}{12}\pi$

(3) $\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\beta<\frac{\pi}{2}$ より, $\alpha+\beta<\pi$.

これと(2)より $\frac{7}{12}\pi < \alpha+\beta < \pi$

この範囲でtanは単調に増加するので $\tan\frac{7}{12}\pi < \tan(\alpha+\beta) < \tan\pi \iff -2-\sqrt{3} < \tan(\alpha+\beta) < 0$

よって $\tan(\alpha+\beta)$ が整数となるとき. $\tan(\alpha+\beta) = -3, -2, -1$ のいずれか.

$\tan(\alpha+\beta) = -3$ のとき

$$-3 = \frac{m+n}{1-mn} \iff 3mn-3-m-n=0$$

$$\iff m(3n-1)-\frac{1}{3}(3n-1)-3-\frac{1}{3}=0 \iff (3n-1)(3m-1)=10$$

$n>m$, $3n-1>0$, $3m-1>0$ に注意して.

$(3n-1, 3m-1) = (10, 1), (5, 2)$ $(n, m) = \left(\frac{11}{3}, \frac{2}{3}\right), (2, 1)$

m, nは整数なので. $(m, n) = (1, 2)$

$\tan(\alpha+\beta) = -2$ のとき

$$-2 = \frac{m+n}{1-mn} \iff 2mn-2-m-n=0 \iff (2m-1)(2n-1)=5$$

$(2m-1, 2n-1) = (1, 5)$ $(m, n) = (1, 3)$

$\tan(\alpha+\beta) = -1$ のとき

$$-1 = \frac{m+n}{1-mn} \iff mn-1-m-n=0 \iff (m-1)(n-1)=2$$

$(m-1, n-1) = (1, 2)$ $(m, n) = (2, 3)$

以上より $(m, n) = \mathbf{(1, 2), (1, 3), (2, 3)}$

神戸大学2019後

2 (1) $\sqrt{\ }$ の中は0以上だから $1-x^2 \geqq 0 \iff -1 \leqq x \leqq 1$

$x-\sqrt{1-x^2} \geqq 0 \iff x \geqq \sqrt{1-x^2}$

上式右辺は0以上だから $x<0$ のとき上の不等式は成立しない

$x \geqq 0$ のとき.

両辺2乗して $x^2 \geqq 1-x^2 \iff x^2 \geqq \frac{1}{2}$ $\therefore x \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$ $(\because x \geqq 0)$.

以上より $\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1}$

(2) $1-x^2 \geqq 0$ より $-1 \leqq x \leqq 1$

$x \geqq 0$ のとき. $\sqrt{1-x^2} \geqq 0$ だから $x+\sqrt{1-x^2} \geqq 0$. は成り立つ.

$x<0$ のとき. $\sqrt{1-x^2} \geqq -x$ 両辺2乗して $1-x^2 \geqq x^2$ $x^2 \leqq \frac{1}{2}$ $\therefore -\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x < 0$ $(\because x<0)$

以上より. $\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1}$

(3) $y^2-2xy+2x^2-1=0$ について. これを y についての2次方程式と考えると.

y が存在する条件は 判別式を D として

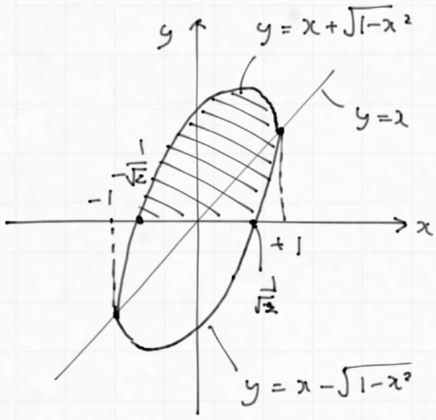
$D/4 = x^2-2x^2+1 = 1-x^2 \geqq 0 \iff -1 \leqq x \leqq 1$

$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき.

$y = x \pm \sqrt{1-x^2}$

(1)(2)の範囲を考えて連立不等式の表す領域は

右図の斜線部分となる



したがって $S(t)$ は $-1 \leqq t \leqq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $S(t)=0$

$-\frac{1}{\sqrt{2}} < t \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $S(t) = \pi\left(t+\sqrt{1-t^2}\right)^2 = \pi\left(1+2t\sqrt{1-t^2}\right)$

$\frac{1}{\sqrt{2}} < t \leqq 1$ のとき. $S(t) = \pi\left(t+\sqrt{1-t^2}\right)^2 - \pi\left(t-\sqrt{1-t^2}\right)^2 = 4\pi t\sqrt{1-t^2}$

$$S(t) = \begin{cases} 0 & \left(-1 \leqq t \leqq -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \pi\left(1+2t\sqrt{1-t^2}\right) & \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} < t \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ 4\pi t\sqrt{1-t^2} & \left(\frac{1}{\sqrt{2}} < t \leqq 1\right) \end{cases}$$

(4) $$V = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi\left(1+2x\sqrt{1-x^2}\right)dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} 4\pi x\sqrt{1-x^2}\,dx = \pi\left[x-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + 2\pi\left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}$$

$$= \pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cancel{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right) - \pi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \cancel{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right) + 2\pi\times 0 + \cancel{2}\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2}\pi + \frac{\sqrt{2}}{3}\pi = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi}$$

神戸大学2019後

3 (1) 得点が0となるのは.

(i) 3回目で3回目のはずれを引いて終了

(ii) 4 〃 〃 〃

(iii) 5 〃 〃 〃

(iv) 6 〃 〃 〃

の4つのパターンが考えられる.

$$p_0=\left(\frac{2}{3}\right)^3+{}_3C_1\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{3}+{}_4C_2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}+{}_5C_3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{2}{3}$$

$$=\frac{8}{3^3}+\frac{8}{3^3}+\frac{\overset{2}{\cancel{6}}\cdot 8}{3^{\cancel{8}4}}+\frac{10\cdot 2^3}{3^6}=\frac{27\times 8\times 2+18\cdot 8+80}{3^6}=\mathbf{\frac{656}{729}}$$

(2) あたりくじを $n+3$ 本引き. はずれくじを3本引く（最終の $n+6$ 本目ははずれ）

$$p_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n+3}\left(\frac{2}{3}\right)^2\times{}_{n+5}C_2\times\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{4(n+5)(n+4)}{3^{n+6}}}$$

(3) $$14a_n-15a_{n+1}=14n\cdot\frac{4(n+5)(n+4)}{3^{n+6}}-15(n+1)\cdot\frac{4(n+6)(n+5)}{3^{n+7}}$$

$$=\frac{4(n+5)}{3^{n+7}}\left\{3\cdot 14\cdot n(n+4)-15(n+1)(n+6)\right\}=\frac{4(n+5)}{3^{n+7}}\left(27n^2+63n-90\right)$$

$$=\frac{4(n+5)}{3^{n+4}}\left(n^2+\frac{7}{3}n-\frac{10}{3}\right)=\frac{4(n+5)}{3^{n+4}}\left(\underbrace{\left(n+\frac{7}{6}\right)^2-\frac{169}{36}}\right)$$

〜部について. $n=1$ のとき最小値 0 だから $n\geqq 1$ のとき $14a_n-15a_{n+1}\geqq 0$

整理して $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqq\dfrac{14}{15}$ が成り立つことが分かる.

(4) $2\leqq n\leqq N-6$ のとき $a_n\leqq\frac{14}{15}a_{n-1}\leqq\frac{14}{15}\cdot\frac{14}{15}\cdot a_{n-2}\leqq\cdots\leqq\left(\frac{14}{15}\right)^{n-1}a_1$ （$n=1$ のときも成り立つ）

$$\sum_{n=1}^{N-6}a_n\leqq\sum_{n=1}^{N-6}\left(\frac{14}{15}\right)^{n-1}a_1=a_1\times\frac{1-\left(\frac{14}{15}\right)^{N-6}}{1-\frac{14}{15}}=1\cdot p_1\times 15\left(1-\left(\frac{14}{15}\right)^{N-6}\right)=1\cdot\frac{4\cdot\overset{2}{\cancel{6}}\cdot\cancel{5}}{3^{\cancel{7}5}}\times\overset{3}{\cancel{15}}\left(1-\left(\frac{14}{15}\right)^{N-6}\right)$$

$$=\frac{200}{243}\left(1-\left(\frac{14}{15}\right)^{N-6}\right)<\frac{200}{243}<1$$

証明終

神戸大学2019後

4 (1) $f(x) = x\int_0^x g(t)\,dt - \int_0^x t g(t)\,dt$

$f'(x) = \int_0^x g(t)\,dt + xg(x) - xg(x) = \int_0^x g(t)\,dt$

$= \int_0^x (2-t)e^{-t} - \pi\sin(\pi t) + 2f'(1) + 2\,dt$

$= \left[-2e^{-t} + te^{-t} + e^{-t} + \cos(\pi t) + 2f'(1)\cdot t + 2t\right]_0^x$

$= -e^{-x} + xe^{-x} + \cos(\pi x) + 2f'(1)x + 2x - (\cancel{-1} + 0 + \cancel{1} + 0 + 0)$

$= -e^{-x} + xe^{-x} + \cos(\pi x) + 2f'(1)x + 2x$

$x=1$ とすると　$f'(1) = \cancel{-e^{-1}} \cancel{+e^{-1}} + (-1) + 2f'(1) + 2$　　$f'(1) = -1$

(2) $f'(x) = -e^{-x} + xe^{-x} + \cos(\pi x)$

$x^2 - f(x) = h(x)$ とおく.　$h'(x) = 2x - f'(x)$

$h''(x) = 2 - 2e^{-x} + xe^{-x} + \pi\sin\pi x = 2(1-e^{-x}) + xe^{-x} + \pi\sin\pi x$

ここで $0 \leqq x \leqq 1$ のとき $\frac{1}{e} \leqq e^{-x} \leqq 1$, $xe^{-x} \geqq 0$, $\sin\pi x \geqq 0$ だから $h''(x) \geqq 0$.

したがって $h'(x)$ は単調に増加し、$h'(0) = 2\cdot 0 - (-e^0 + 0\cdot e^0 + \cos 0) = 0$ なので

$0 \leqq x \leqq 1$ において $h'(x) \geqq 0$.

したがって $h(x)$ は単調に増加し、$h(0) = 0 - f(0) = 0 - \int_0^0 (x-t)g(t)\,dt = 0$ なので.

$0 \leqq x \leqq 1$ において $h(x) \geqq 0$

よって $0 \leqq x \leqq 1$ において. $f(x) \leqq x^2$ が成り立つ.

$f(x) - \left\{x^2 - \left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\right)x^3\right\} = i(x)$ とおく.　　$i'(x) = f'(x) - 2x + 3\left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\right)x^2$

$i''(x) = 2e^{-x} - xe^{-x} - \pi\sin\pi x - 2 + 6\left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\right)x$

$i'''(x) = -3e^{-x} + xe^{-x} - \pi^2\cos\pi x + \pi^2 + 3 = 3(1-e^{-x}) + xe^{-x} + \pi^2(1-\cos(\pi x))$

$0 \leqq x \leqq 1$ において $1-e^{-x} \geqq 0$, $xe^{-x} \geqq 0$, $1-\cos(\pi x) \geqq 0$ だから $i'''(x) \geqq 0$.

$i''(0) = 2 - 0 - 0 - 2 + 0 = 0$ および $i'''(x) \geqq 0$ より　$0 \leqq x \leqq 1$ において $i''(x) \geqq 0$

$i'(0) = f'(0) - 0 + 0 = -1 + 1 = 0$ および $i''(x) \geqq 0$ より　$0 \leqq x \leqq 1$ において $i'(x) \geqq 0$

$i(0) = f(0) - 0 + 0 = 0$ および $i'(x) \geqq 0$ より　$0 \leqq x \leqq 1$ において $i(x) \geqq 0$

よって $0 \leqq x \leqq 1$ において $x^2 - \left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\right)x^3 \leqq f(x)$ が成り立つ.

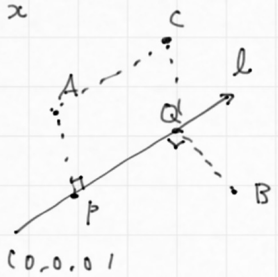
(3) (2) より　$\frac{x}{\sin x} - \left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{\sin x} \leqq \frac{f(x)}{x\sin x} \leqq \frac{x}{\sin x}$

$\lim_{x\to+0} \frac{x}{\sin x} = 1$,　$\lim_{x\to+0}\left\{\frac{x}{\sin x} - \frac{x}{\sin x}\left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\right)\cdot x\right\} = 1$ だから はさみうちの原理より $\lim_{x\to+0} \frac{f(x)}{x\sin x} = 1$

神戸大学2019後

5 (1) Pは l 上の点なので (p,p,p) と表せる.

$\overrightarrow{PA}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0$ となるので $x_1-p+x_2-p+x_3-p=0$ $\quad p=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}=\bar{x}$



同様に Qを (q,q,q) として $\overrightarrow{QB}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ より $q=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}=\bar{y}$

$$P(\bar{x},\bar{x},\bar{x}),\quad Q(\bar{y},\bar{y},\bar{y})$$

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{QB}=\begin{pmatrix}x_1-\bar{x}\\x_2-\bar{x}\\x_3-\bar{x}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1-\bar{y}\\y_2-\bar{y}\\y_3-\bar{y}\end{pmatrix}=(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y})+(x_2-\bar{x})(y_2-\bar{y})+(x_3-\bar{x})(y_3-\bar{y})$$

$$=r\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(y_i-\bar{y})^2}$$

ここで $s_x=\sqrt{\dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{i=1}^{3}(x_i-\bar{x})^2}$, $s_y=\sqrt{\dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{i=1}^{3}(y_i-\bar{y})^2}$ だから $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{QB}=r\sqrt{3}s_x\cdot\sqrt{3}s_y=\mathbf{3rs_xs_y}$

(2) $|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2}=\sqrt{3}s_x$, 同様に $|\overrightarrow{QB}|=\sqrt{3}s_y$

$$|\overrightarrow{PB}|=\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2+|\overrightarrow{QB}|^2}=\sqrt{3(\bar{x}-\bar{y})^2+3s_y^2}$$

$$\cos\angle BPA=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|}=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QB})}{\sqrt{3}s_x\cdot\sqrt{3(\bar{x}-\bar{y})^2+3s_y^2}}=\frac{0+\cancel{3}r\cancel{s_x}s_y}{\cancel{3}\cancel{s_x}\sqrt{(\bar{x}-\bar{y})^2+s_y^2}}=\frac{rs_y}{\sqrt{a^2s_y^2+s_y^2}}=\mathbf{\frac{r}{\sqrt{a^2+1}}}$$

(4) Kは α 上にあるので $\overrightarrow{PK}=s\overrightarrow{PA}+t\overrightarrow{PQ}$ と表せる.

$\overrightarrow{KB}$ と α は垂直だから $\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{PA}=0$ かつ. $\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$

$$\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{PA}=(\overrightarrow{PB}-s\overrightarrow{PA}-t\overrightarrow{PQ})\cdot\overrightarrow{PA}=3rs_xs_y-s\cdot3s_x^2-t\cdot0=3s_x(rs_y-ss_x)=0$$

$rs_y=ss_x$ $\quad s=\dfrac{s_y}{s_x}r$ $\quad 0<r<\dfrac{s_x}{s_y}$ より $\quad 0<s<1\ldots①$

$$\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{PQ}=(\overrightarrow{PB}-s\overrightarrow{PA}-t\overrightarrow{PQ})\cdot\overrightarrow{PQ}=|\overrightarrow{PQ}|^2-0-t\cdot|\overrightarrow{PQ}|^2=(1-t)\cdot3\cdot(\bar{x}-\bar{y})^2=0\quad\ldots②$$

ここで $\bar{x}-\bar{y}=0$ のとき, $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}$ となり, $\overrightarrow{PQ}=\vec{0}$ だから. $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PC}$ となる.

よって $\overrightarrow{PK}=s\overrightarrow{PA}=s\overrightarrow{PC}=s\overrightarrow{QC}$ $(0<s<1)$ となり. Kは QC 上にある.

次に $\bar{x}-\bar{y}\neq0$ のとき. ② より $t=1$.

このとき. $\overrightarrow{PK}=s\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PQ}$ より $\overrightarrow{QK}=s\overrightarrow{PA}=s(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PQ})=s\overrightarrow{QC}$ $\quad(0<s<1)$

となり. Kは線分QC上にあることが分かる.

以上より. 題意の条件の下で Kは 線分QC上にあることが示された. 証明終