信州大学2019

1 (1) $c=8$ のとき　$(a, b)=(1,7),(2,6),(3,5)$

$c=7$ 〃　$(a, b)=(1,6),(2,5),(3,4)$

$c=6$ 〃　$(a, b)=(1,5),(2,4)$

$c=5$ 〃　$(a, b)=(1,4),(2,3)$

$c=4$ 〃　$(a, b)=(1,3)$

$c=3$ 〃　$(a, b)=(1,2)$

$c=2, 1$ のとき　a, b は存在しない

以上より　12通り

(2) (i) $n=2m$ のとき

c は $3 \sim 2m$ までのいずれか

① $c=2k$ のとき　$(a, b)=(1, 2k-1), (2, 2k-2), \cdots (k-1, k+1)$ の $k-1$ 通り

② $c=2k-1$ のとき　$(a, b)=(1, 2k-2), (2, 2k-3), \cdots (k-1, k)$ の $k-1$ 通り

したがって (a, b, c) の組み合わせは

$$\sum_{k=2}^{m}(k-1)+\sum_{k=2}^{m}(k-1)=2\sum_{k=2}^{m}(k-1)=2\times\frac{1+m-1}{2}\times(m-1)=m(m-1)$$

$$=\frac{1}{2}n\left(\frac{1}{2}n-1\right)=\frac{1}{4}n(n-2)$$

(ii) $n=2m-1$ のとき

c は $3 \sim 2m-1$ まで　(i)と同様に考えて (a, b, c) の組み合わせは

$$\sum_{k=2}^{m-1}(k-1)+\sum_{k=2}^{m}(k-1)=\frac{1}{2}(1+m-2)(m-2)+\frac{1}{2}(1+m-1)(m-1)$$

$$=\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m+1+\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}m=m^2-2m+1=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-2\times\frac{n+1}{2}+1$$

$$=\frac{1}{4}n^2-\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(n-1)^2$$

$$\begin{cases}\frac{1}{4}n(n-2) & n\text{が偶数のとき}\\ \frac{1}{4}(n-1)^2 & n\text{が奇数のとき}\end{cases}$$

信州大学2019

2

(1) $\int_0^1 f(t)\,dt = a$ とおく.

$f(x) = x^2 - \frac{3}{5}ax + 4$

$a = \int_0^1 t^2 - \frac{3}{5}at + 4\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{10}at^2 + 4t\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{3}{10}a + 4$

$\therefore a = \frac{10}{3}$. $f(x) = x^2 - 2x + 4$.

これと $y = mx$ が接するので,連立して. $x^2 - 2x + 4 = mx$.

この2次方程式の判別式をDとして.

$D = (-2-m)^2 - 4\times 4 = 0$. $m^2 + 4m - 12 = 0$. $m = 2, -6$.

$m=2$ のとき. $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0$ より. 接点の x 座標は 2.

$m=-6$ 〃 $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 = 0$ 〃 〃 -2.

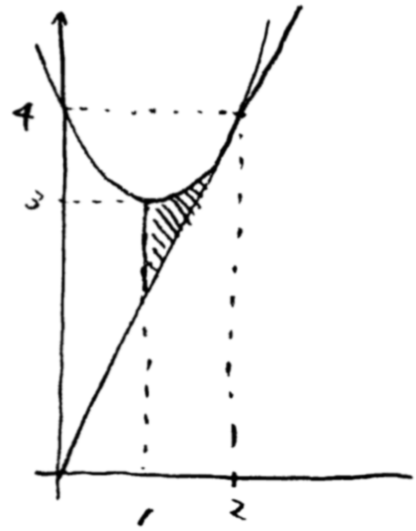
接点の x 座標は正ということなので. $m=2$.

$f(2) = 4 - 4 + 4 = 4$.

以上より $\underline{m = 2.\quad 接点は\ (2, 4)}$

(2) $f(x) = (x-1)^2 + 3$.

Sの範囲は右図斜線部



$\int_1^2 f(x) - 2x\,dx$

$= \int_1^2 (x-2)^2 dx = \left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_1^2 = \underline{\frac{1}{3}}$

信州大学2019

3 (1) $t \geqq 0,\ a > 1$ より $1+t^a > 1 > 0$ だから不等式は

$$k \geqq \frac{(1+t)^a}{1+t^a}$$

と変形できる。右辺を $f(t)$ とおく。

$$f'(t) = \frac{a(1+t)^{a-1}(1+t^a) - (1+t)^a \times at^{a-1}}{(1+t^a)^2} = \frac{a(1+t)^{a-1}(1-t^{a-1})}{(1+t^a)^2}$$

ここで $t \geqq 0$ だから $(1+t^a)^2 > 0$, $(1+t)^{a-1} > 0$.

よって $f'(t) = 0$ となるのは $1-t^{a-1} = 0$ のときに限られる。 $a > 1$ だから t^{a-1} は単調に増加し、$t^{a-1} = 1$ となるのは $t = 1$ のみ.

したがって $f(t)$ の増減は右のようになり

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$

$$f(t) \leqq f(1) = \frac{2^a}{1+1} = 2^{a-1}$$

したがって 全ての $t \geqq 0$ に対して $k \geqq f(t)$ が成り立つ

k の最小値は $k = 2^{a-1}$

$(1+t)^a \leqq k(1+t^a)$ がすべての $t \geqq 0$ に対して成り立つ k の最小値は **2^{a-1}**

(2) $t = (1+\sin x)^{\frac{1}{5}},\ 0 \leqq x \leqq \pi$ とすると. $t \geqq 0$ が成り立つので、(1) より

$$\left\{1 + (1+\sin x)^{\frac{1}{5}}\right\}^a \leqq 2^{a-1}\left\{1 + (1+\sin x)^{\frac{a}{5}}\right\}$$

$a = 10$ とすると

$$\left\{1 + (1+\sin x)^{\frac{1}{5}}\right\}^{10} \leqq 2^9\left\{1 + (1+\sin x)^2\right\}$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ の区間で積分

$$\int_0^\pi (1+\sqrt[5]{1+\sin x})^{10} dx \leqq \int_0^\pi 2^9\left\{1+(1+\sin x)^2\right\}dx$$

$$= 2^9 \int_0^\pi 2 + 2\sin x + \frac{1-\cos 2x}{2} dx = 2^9\left[\frac{5}{2}x - 2\cos x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi$$

$$= 2^9\left(\frac{5}{2}\pi + 2 + 2\right)$$

$$< 2^9 \times 11.875 = 6080$$

信州大学2019

4 (1) $n=2m$ のとき　$2^{2m}-1=4^m-1=(4-1)(4^{m-1}+4^{m-2}+\cdots+4+1)=3(4^{m-1}+4^{m-2}+\cdots+4+1)$

よって　nが偶数のとき．2^n-1は3で割りきれる．

$n=2m-1$のとき　$2^{2m-1}-1=2\cdot 2^{2m-2}-1=2(4^{m-1}-1)+1$

$m\geqq 2$のとき　$2(4^{m-1}-1)+1=2(4-1)(4^{m-2}+4^{m-3}+\cdots+4+1)+1=3\times 2(4^{m-2}+\cdots+4+1)+1$

となるので　2^n-1は3で割った余りが1.

$m=1\ (n=1)$のとき．　$2^1-1=1$ だから．　3で割った余りは1

以上より　2^n-1が3で割りきれるのは　$n=2m\ (m=1,2,3\ldots)$ のとき．

(2) 合同式は全て3を法とするものとする．

(i) $n\equiv 0$ のとき　$n^n-1\equiv 0^n-1\equiv 2$

(ii) $n\equiv 1$ のとき　$n^n-1\equiv 1^n-1\equiv 0$

(iii) $n\equiv 2$ のとき　$n^n-1\equiv 2^n-1\equiv (-1)^n-1$

nが偶数のとき余りは0．　nが奇数のときは余り1　　　2　5

$(n=2,8,14,\ldots)$　　　$(n=5,11,17\ldots)$

以上より．　nが $3m-2\ (m=1,2,3\cdots)$．または　$6m-4\ (m=1,2,3\cdots)$のとき．

n^n-1は3で割りきれる．

信州大学2019

5

(1) 左辺 $= \cos(n+2)\theta - 2\cos\theta\cos(n+1)\theta + \cos n\theta$

$= \cos n\theta\cos 2\theta - \sin n\theta\sin 2\theta - 2\cos\theta(\cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta) + \cos n\theta$

$= \cos n\theta(\cancel{2\cos^2\theta}\cancel{-1}) - \cancel{2\sin\theta\cos\theta\sin n\theta} - \cancel{2\cos n\theta\cos^2\theta} - \cancel{2\cos\theta\sin\theta\sin n\theta} + \cancel{\cos n\theta}$

$= 0$

証明終

(2) (1) で $n=3$ とすると $\cos 5\theta - 2\cos\theta\cos 4\theta + \cos 3\theta = 0$ …①

$n=2$ とすると $\cos 4\theta - 2\cos\theta\cos 3\theta + \cos 2\theta = 0$ …②

$n=1$ とすると $\cos 3\theta - 2\cos\theta\cos 2\theta + \cos\theta = 0.$ …③

③ より $\cos 3\theta = 2\cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - \cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4x^3 - 3x$

② より $\cos 4\theta = 2\cos\theta\cos 3\theta - \cos 2\theta = 2x(4x^3 - 3x) - 2x^2 + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$

① より $\cos 5\theta = 2\cos\theta\cos 4\theta - \cos 3\theta = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - 4x^3 + 3x =$ $\boldsymbol{16x^5 - 20x^3 + 5x}$

(3) (2) で $\theta = \frac{\pi}{10}$ とすると

$\cos\frac{\pi}{2} = 16x^5 - 20x^3 + 5x$ $\quad x = \cos\frac{\pi}{10} \neq 0$

$16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$

$$x^2 = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 80}}{16} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$$

$x = \cos\frac{\pi}{10} > \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より $x^2 > \frac{3}{4}$ だから $x^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{\cos^2\frac{\pi}{10} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}}$