岡山理科大(数)2018

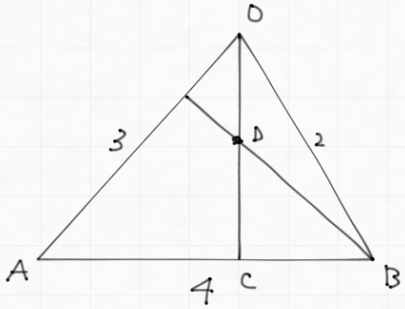
1 $x = 5(\sqrt{6}-\sqrt{5})$, $y = 5(\sqrt{6}+\sqrt{5})$

(1) $x+y = 5(\sqrt{6}-\sqrt{5})+5(\sqrt{6}+\sqrt{5}) = \mathbf{10\sqrt{6}}$

(2) $xy = 5(\sqrt{6}-\sqrt{5})\times 5(\sqrt{6}+\sqrt{5}) = \mathbf{25}$

(3) $x^3+y^3 = (x+y)^3-3xy(x+y) = (10\sqrt{6})^3-3\cdot 25\times 10\sqrt{6} = 6000\sqrt{6}-750\sqrt{6} = \mathbf{5250\sqrt{6}}$

岡山理科大(数)2018



2

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = 4^2$

$3^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2^2 = 4^2$ $\qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{3}{2}$

(2) AC : CB = s : 1-s として

CはAB上にあるので $\vec{OC} = s\vec{OB} + (1-s)\vec{OA}$

$\vec{OC}\cdot\vec{AB} = (s\vec{OB} + (1-s)\vec{OA})\cdot(\vec{OB}-\vec{OA}) = 4s - \frac{3}{2}s + \frac{3}{2}(1-s) - 9(1-s) = 0$ $\qquad s = \frac{3}{4}$

$\therefore \vec{OC} = \frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{3}{4}\vec{OB}$

(3) DはOC上にあるので $\vec{OD} = k\vec{OC}$ と表すことができる.

$\vec{BD} \perp \vec{OA}$ より $\vec{BD}\cdot\vec{OA} = \vec{0}$

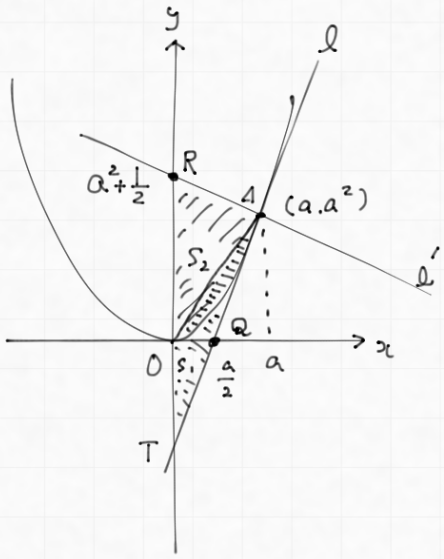
$(k\vec{OC} - \vec{OB})\cdot\vec{OA} = 0$

$(\frac{1}{4}k\vec{OA} + \frac{3}{4}k\vec{OB} - \vec{OB})\cdot\vec{OA} = 0$

$\frac{1}{4}k\cdot 3^2 + \frac{3}{4}k\cdot\frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$ $\qquad k = \frac{4}{9}$ $\qquad \vec{OD} = \frac{1}{9}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB}$

岡山理科大(数)2018

3 $y=x^2$ $y'=2x$



(1) l: $y=2a(x-a)+a^2$ $\quad$ $y=2ax-a^2$

l': $y=-\frac{1}{2a}(x-a)+a^2$ $\quad$ $y=-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}$

(2) Q: $y=0$ と l を連立 $x=\frac{a}{2}$ $\quad$ $Q\left(\frac{a}{2}, 0\right)$

R: $x=0$ と l' を連立 $y=a^2+\frac{1}{2}$ $\quad$ $R\left(0, a^2+\frac{1}{2}\right)$

(3) $\frac{OR}{OQ}=\frac{a^2+\frac{1}{2}}{\frac{a}{2}}=2a+\frac{1}{a}\geqq 2\sqrt{2a\cdot\frac{1}{a}}=2\sqrt{2}$ $\quad$ $(\because a>0)$

等号は $2a=\frac{1}{a}$ のときで $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $(\because a>0)$

以上より $\frac{OR}{OQ}$ は $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最小となり最小値は $2\sqrt{2}$

(4) (a, a^2) を A とする

線分OAとCで囲まれる図形の面積は $\frac{1}{6}a^3$

l と y 軸との交点を T として $\triangle OTA=\frac{1}{2}OT\cdot a=\frac{1}{2}a^3$

したがって $S_1=\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{6}a^3=\frac{1}{3}a^3$

$\triangle OTA=\frac{1}{2}\left(a^2+\frac{1}{2}\right)a=\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{4}a$

したがって $S_2=\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{4}a+\frac{1}{6}a^3$

$S_1:S_2=\frac{1}{3}a^3:\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{4}a=\frac{1}{3}a^2:\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{4}=1:5$.

$\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{4}=\frac{5}{3}a^2$ $\quad$ $a^2=\frac{1}{4}$ $\quad$ $a=\frac{1}{2}$

岡山理科大(数)2018

4 (1) 表を○ 裏を×で表す

p_4について

○×○○, ××○○ の2通り. $p_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 2 = \frac{1}{8}$

p_5について

○××○○, ×○×○○, ×××○○ $p_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times 3 = \frac{3}{32}$

(2) q_{n+1}について

n回目は必ず裏だから $q_{n+1} = \frac{1}{2} r_n$ $(n \geqq 1)$

r_{n+1}について

n回目は表でも裏でも良いので $r_{n+1} = \frac{1}{2} q_n + \frac{1}{2} r_n$ $(n \geqq 1)$

(3) n回目は表が出て、かつそこで終了していないことが必要. $p_{n+1} = \frac{1}{2} q_n$ $(n \geqq 1)$

(4) $q_{n+1} = \frac{1}{2} r_n$ より $r_n = 2q_{n+1}$ を $r_{n+1} = \frac{1}{2} q_n + \frac{1}{2} r_n$ に代入

$$2q_{n+2} = \frac{1}{2} q_n + \frac{1}{2} \cdot 2 q_{n+1} \quad (n \geqq 1)$$

$$4q_{n+2} = q_n + 2q_{n+1} \quad (n \geqq 1)$$

ここに $q_n = 2p_{n+1}$ を代入

$$8p_{n+3} = 2p_{n+1} + 4p_{n+2} \quad (n \geqq 1)$$

$$p_{n+2} = \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2} p_{n+1} \quad (n \geqq 2)$$

$p_1 = 0$. $p_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ および

p_3は×○○となるときなので $p_3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ を上の式に代入すると成り立つので.

$$p_{n+2} = \frac{1}{2} p_{n+1} + \frac{1}{4} p_n \quad (n \geqq 1)$$

岡山理科大(数)2018

5 (1) $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

360の約数は $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ $(a = 0, 1, 2, 3,\ b = 0, 1, 2,\ c = 0, 1)$

と表せるので $4 \times 3 \times 2 = 24$ 通りある ∴ 360の約数は **24個**

それらの和は、

$$2^0 \times 3^0 \times 5^0 + 2^0 \times 3^0 \times 5^1 + 2^0 \times 3^1 \times 5^0 + 2^0 \times 3^1 \times 5^1 + 2^0 \times 3^2 \times 5^0 + 2^0 \times 3^2 \times 5^1 + 2^1 \times 3^0 \times 5^0 + \cdots + 2^3 \times 3^2 \times 5^1$$

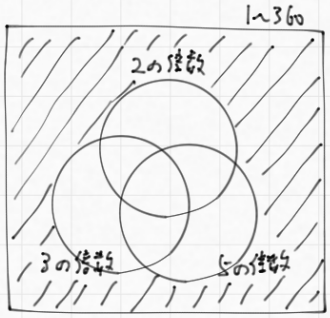
$$= (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(3^0 + 3^1 + 3^2)(5^0 + 5^1) = 15 \times 13 \times 6 = \mathbf{1170}$$

(2) $1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ だから、360との最小公倍数が1800となる数は

$2^a \cdot 3^b \cdot 5^2$ $(a = 0, 1, 2, 3,\ b = 0, 1, 2)$

と表すことができ、$4 \times 3 = 12$ 通りある。 ∴ **12個**。

(3) 360以下で、2、3、5の倍数でない数



2の倍数	$360 \div 2 = 180$
3 〃	$360 \div 3 = 120$
5 〃	$360 \div 5 = 72$
2かつ3 〃	$360 \div 6 = 60$
2かつ5 〃	$360 \div 10 = 36$
3かつ5 〃	$360 \div 15 = 24$
2かつ3かつ5 〃	$360 \div 30 = 12$

360以下で2、3、5の倍数でない自然数の個数は、

$360 - (180 + 120 + 72 - 60 - 36 - 24 + 12) = 360 - 264 = \mathbf{96}$ 個