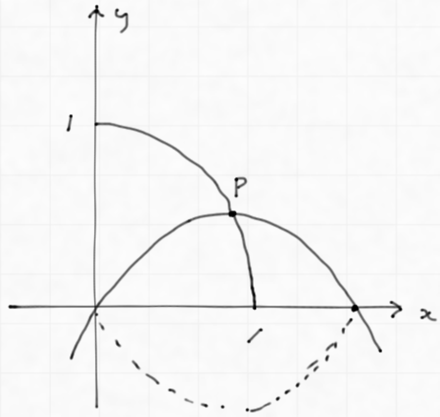
香川大学2019

1 (1) $f(x)$ の頂点は P だから $f(x)$ は

$$f(x) = a(x-\cos\theta)^2 + \sin\theta$$

と表すことができる。これが原点を通るので

$$0 = a\cos^2\theta + \sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$



よって $f(x) = -\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}(x-\cos\theta)^2 + \sin\theta$

$$= -\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}x^2 + 2\tan\theta\, x$$

(2) $V = \displaystyle\int_0^{2\cos\theta} \pi f(x)^2\,dx = \pi\int_0^{2\cos\theta} \frac{\sin^2\theta}{\cos^4\theta}x^4 - \frac{4\sin^2\theta}{\cos^3\theta}x^3 + 4\tan^2\theta\, x^2\,dx$

$$= \pi\left\{\frac{\sin^2\theta}{\cos^4\theta}\times\frac{1}{5}(2\cos\theta)^5 - \frac{4\sin^2\theta}{\cos^3\theta}\times\frac{1}{4}\times(2\cos\theta)^4 + \frac{4}{3}\tan^2\theta\cdot(2\cos\theta)^3\right\}$$

$$= \frac{32}{5}\pi\sin^2\theta\cos\theta - 16\pi\sin^2\theta\cos\theta + \frac{32}{3}\pi\sin^2\theta\cos\theta = \frac{16}{15}\pi\sin^2\theta\cos\theta$$

(3) $\cos\theta = t$ とおく ($0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $0<t<1$)

$$V = \frac{16}{15}\pi(1-t^2)t$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{16}{15}\pi(1-3t^2)$$

だから $1-3t^2=0$ すなわち $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $\frac{dV}{dt}=0$ であり V の増減は以下のようになる

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$\frac{dV}{dt}$	/	+	0	−	/
V	/	↗		↘	/

$t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $V = \frac{16}{15}\pi\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{32\sqrt{3}}{135}\pi$ (このとき θ は、$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす)

香川大学2019

2　$0<x<1$ のとき　$1-x^2>0$,　$\sqrt{1-x^2}>0$，$\cos x>0$　なので平方の差を考える

$(\sqrt{1-x^2})^2-(1-x^2)^2=f(x)$ とする

$f(x)=1-x^2-1+2x^2-x^4=-x^4+x^2=x^2(1-x^2)>0$

よって　$\sqrt{1-x^2}>1-x^2$

$g(x)=(\cos x)^2-(\sqrt{1-x^2})^2=\cos^2 x-1+x^2$　とおく

$g'(x)=-2\cos x\sin x+2x$

$g''(x)=+2\sin^2 x-2\cos^2 x+2=4\sin^2 x>0$

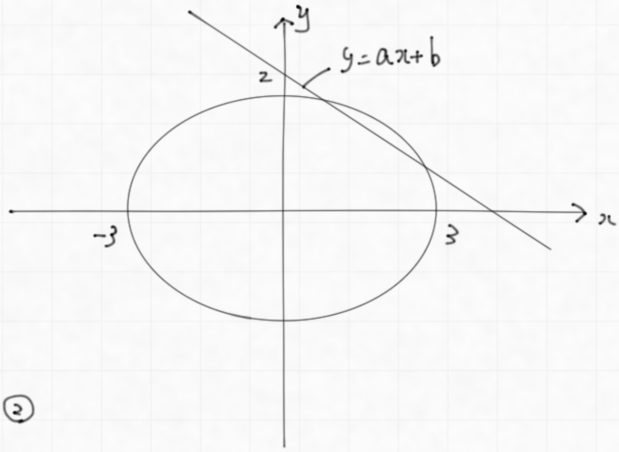
$g''(x)>0$. だから $g'(x)$は単調に増加する. また $g'(0)=0$ だから　$0<x<1$において　$g'(x)>0$

$g'(x)>0$ だから　$g(x)$は単調に増加する. また $g(0)=1-1+0^2=0$ だから $0<x<1$ において $g(x)>0$

したがって　$\cos x>\sqrt{1-x^2}$

以上より　$\mathbf{1-x^2<\sqrt{1-x^2}<\cos x}$

香川大学2019



3 直線 $y=ax+b$ とだ円が y 座標が正の相異なる2点で交わるための条件は、2式を連立した

$$\frac{x^2}{9}+\frac{(ax+b)^2}{4}=1 \quad \cdots ①$$

が相異なる2つの解をもち、

$y=ax+b$ が $(3,0)$ および $(-3,0)$ の上側にあること $\cdots ②$

①より $4x^2+9a^2x^2+18abx+9b^2-36=0$

$(9a^2+4)x^2+18abx+9b^2-36=0$

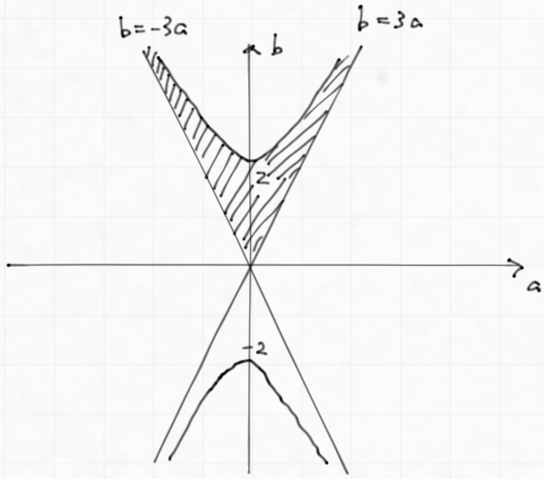
判別式を D とすると $D>0$ となるので

$$D/4=(9ab)^2-(9a^2+4)(9b^2-36)=324a^2-36b^2+144>0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9a^2-b^2+4>0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b^2}{4}-\frac{a^2}{\frac{4}{9}}<1 \quad \cdots ③$$

②より $(3,0)$ および $(-3,0)$ が $y<ax+b$ の領域にあるので

$3a+b>0$, $-3a+b>0$ $\cdots ④$

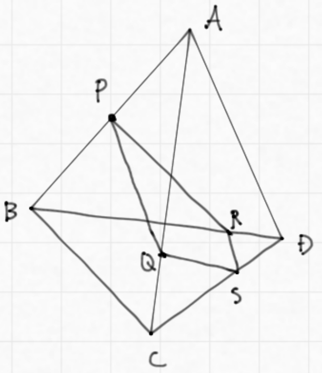


③④を同時に満たすとき、直線とだ円は y 座標が正の異なる2点で交わる。

領域 D は右図斜線部（境界除く）

香川大学2019

4



$\vec{AB}=\vec{b}$, $\vec{AC}=\vec{c}$, $\vec{AD}=\vec{d}$

AP:PB $= s:1-s$ とすると $\vec{AP}=s\vec{b}$

AQ:QC $= t:1-t$ 〃 $\vec{AQ}=t\vec{c}$

BR:RD $= u:1-u$ 〃 $\vec{AR}=u\vec{d}+(1-u)\vec{b}$

Sは平面PQR上の点だから、

$\vec{AS}=\vec{AP}+\alpha\vec{PR}+\beta\vec{PQ}$ と表すことができる

$\vec{AS}=s\vec{b}+\alpha(u\vec{d}+(1-u)\vec{b}-s\vec{b})+\beta(t\vec{c}-s\vec{b})$

$=(s+\alpha(1-u)-\alpha s-s\beta)\vec{b}+\alpha u\vec{d}+\beta t\vec{c}$

Sは CD上にあるので、 $s+\alpha(1-u)-\alpha s-\beta s=0$ …①

$\alpha u+\beta t=1$ …②　　(CS : SD $=\alpha u:\beta t$)

①②より　$s+\alpha-\alpha u-\alpha s-\frac{1-\alpha u}{t}s=0 \iff st+\alpha t-\alpha ut-\alpha st+\alpha us-s=0$

$\alpha=\frac{s-st}{t-ut-st+us}$　　$\beta=\frac{su-u-s+1}{t-ut-st+us}=\frac{(s-1)(u-1)}{t-ut-st+us}$

$\frac{AP}{PB}\times\frac{BR}{RD}\times\frac{QC}{AQ}\times\frac{SD}{CS}=\frac{s}{1-s}\times\frac{\cancel{u}}{1-u}\times\frac{1-t}{\cancel{t}}\times\frac{\beta\cancel{t}}{\alpha\cancel{u}}$

$=\frac{\cancel{s}}{\cancel{1-s}}\times\frac{1-t}{\cancel{1-u}}\times\frac{\cancel{(s-1)(u-1)}}{\cancel{s(1-t)}}=1$

$\therefore\ \frac{AP}{PB}\times\frac{BR}{RD}=\frac{AQ}{QC}\times\frac{CS}{SD}$ が成立している