日本獣医生命科学大2018

I $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

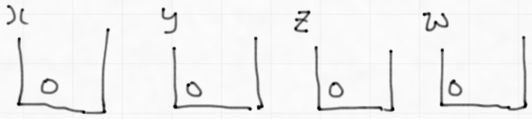
II $\int_0^1 f(t)\,dt = a$ とおく.

$f(x) = 2x + 4a$.

$a = \int_0^1 2t + 4a\,dt = \left[t^2 + 4at\right]_0^1 = 1 + 4a \qquad a = -\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ f(x) = 2x - \dfrac{4}{3}$

III (1) 16個のボールを. x. y. z, w の4つの箱にいれることを考える.



先に1つずつ入れておき. 残った12個のボールを4つの箱にいれる

$_4H_{12} = {}_{15}C_{12} = {}_{15}C_3 = \dfrac{\overset{5}{\cancel{15}} \cdot \overset{7}{\cancel{14}} \cdot 13}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 455$ 通り

(2) $y + 1 = y'$, $z + 2 = z'$, $w + 3 = w'$ とおくと.

$y' \geqq 0$. $z' \geqq 0$. $w' \geqq 0$. $x + y' + z' + w' = 22$.

(1)と同様に 22個のボールを4つの箱にいれることを考えて

$_4H_{22} = {}_{25}C_3 = \dfrac{25 \cdot \overset{4}{\cancel{24}} \cdot 23}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 2300$ 通り

日本獣医生命科学大2018

IV

(1) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$, $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$ だから.

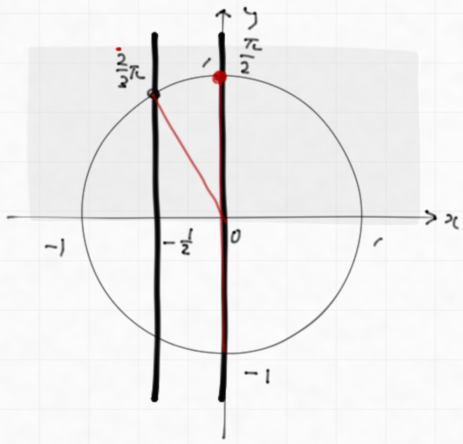
$$f(\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + 6(1-\cos^2\theta) - \cos\theta - 6$$

$$= 4\cos^3\theta - 6\cos^2\theta - 4\cos\theta$$

(2) $f(\theta) = 2\cos\theta(2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2) = 2\cos\theta(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 2)$

だから $f(\theta)=0$ となるのは $\cos\theta = 0, -\frac{1}{2}$ のとき.

なので $\theta = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi}$



(3) $\cos\theta = t$ とする. $(-1 \leqq \cos\theta = t \leqq 1)$

$f(\theta) = 4t^3 - 6t^2 - 4t = g(t)$ とする

$g'(t) = 12t^2 - 12t - 4 = 4(3t^2 - 3t - 1)$

$g'(t) = 0$ となるのは $t = \frac{3 \pm \sqrt{9+12}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{6}$

$\frac{3+\sqrt{21}}{6} > 1$ だから $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲の増減は

次のようになる.

t	-1	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{21}}{6}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	-6	$\nearrow$		$\searrow$	-6

$g(-1) = -6$, $g(1) = -6$

$$\begin{array}{r|rrrr} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & & \\ 3\ \ -3\ \ -1 & 4 & -6 & -4 & 0 \\ & 4 & -4 & -\frac{4}{3} & \\ \hline & & -2 & -\frac{8}{3} & 0 \\ & & -2 & +2 & \frac{2}{3} \\ \hline & & & -\frac{14}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}$$

$$g(t) = 4t^3 - 6t^2 - 4t = (3t^2 - 3t - 1)\left(\frac{4}{3}t - \frac{2}{3}\right) - \frac{14}{3}t - \frac{2}{3}$$

だから

$$g\left(\frac{3-\sqrt{21}}{6}\right) = -\frac{14}{3}\cdot\frac{3-\sqrt{21}}{6} - \frac{2}{3} = -3 + \frac{7}{9}\sqrt{21}$$

最大値は $\frac{7}{9}\sqrt{21} - 3$. 最小値は -6

日本獣医生命科学大2018

V (1) $a_{n+1}-\alpha(n+1)-\beta=2(a_n-\alpha n-\beta)$ を満たす α, β をもとめる.

$a_{n+1}=2a_n-\alpha n-\beta+\alpha$

$-\alpha=2,\ -\beta+\alpha=-4 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha=-2,\ \beta=2.$

よって漸化式は

$a_{n+1}+2(n+1)-2=2(a_n+2n-2)$

と変形できる.

これは. $\{a_n+2n-2\}$ が初項 $a_1+2\cdot1-2$, 公比2の等比数列であることを示しているので

$a_n+2n-2 = 2^{n-1}(a_1+2-2)$

$$a_n=3\cdot2^{n-1}-2n+2$$

(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(3\cdot2^{k-1}-2k+2)$

$=3\times\dfrac{2^n-1}{2-1}+\dfrac{0+2-2n}{2}\times n=3\cdot2^n-3+(1-n)n=3\cdot2^n-n^2+n-3$

$$S_n=3\cdot2^n-n^2+n-3$$