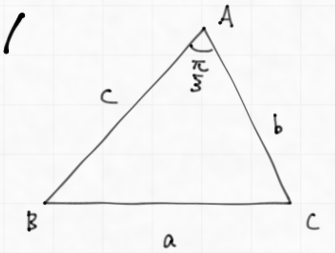
大阪医科大学2019

1



(1) 余弦定理より $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow a^2=b^2+c^2-bc$ …①

$ab=21$ を満たす自然数の組みは $(a,b)=(1,21),(3,7),(7,3),(21,1)$

(i) $(a,b)=(1,21)$ のとき. ①は $c^2-21c+440=0$ cは整数ではないので不適

(ii) $(a,b)=(3,7)$ のとき ①は $c^2-7c+40=0$ 〃

(iii) $(a,b)=(7,3)$ のとき ①は $c^2-3c-40=0$ $c=8,-5$

$c>0$ だから $c=8$ $\therefore (a,b,c)=(7,3,8)$

(iv) $(a,b)=(21,1)$ のとき ①は $c^2-c-440=0$ cは整数ではないので不適

(i)〜(iv) より $(a,b,c)=\mathbf{(7,3,8)}$

(2) $a+b+c=\frac{bc}{2}$ より $a=\frac{bc}{2}-b-c$ を①に代入

$$\left(\frac{bc}{2}-b-c\right)^2=b^2+c^2-bc$$

$$\frac{1}{4}b^2c^2+\cancel{b^2}+\cancel{c^2}-b^2c-bc^2+2bc=\cancel{b^2}+\cancel{c^2}-bc$$

$$bc(bc-4b-4c+12)=0$$

$bc>0$ だから上式は $(b-4)(c-4)=4$ と変形できる.

$(b-4,c-4)=(-4,-1),(-2,-2),(-1,-4),(1,4),(2,2),(4,1)$

$(b,c)=(0,3),(2,2),(3,0),(5,8),(6,6),(8,5)$

$b>0,\ c>0$ を満たすのは $(b,c)=(2,2),(5,8),(6,6),(8,5)$

それぞれにつき a をもとめると. 順に $-2,7,6,7$

以上より. 題意を満たすものは $(a,b,c)=\mathbf{(7,5,8),(6,6,6),(7,8,5)}$

大阪医科大学2019

2 (1) $f(t)=e^t-\frac{t^2}{2}$ とおく

$f'(t)=e^t-t$, $f''(t)=e^t-1$

$t\geqq 0$ のとき. $f''(t)\geqq e^0-1=0$ だから. $f'(t)$ は単調に増加する.

よって $f'(t)\geqq f'(0)=e^0-0=1>0$

よって $f(t)$ は単調に増加するので.

$f(t)\geqq f(0)=e^0-0=1>0$

以上より $t\geqq 0$ において $f(t)>0$ であり. したがって $t\geqq 0$ において $\frac{t^2}{2}<e^t$ が成り立つ.

(2) $g(x)=(x^2-1)e^{-x^2}$ とおく.

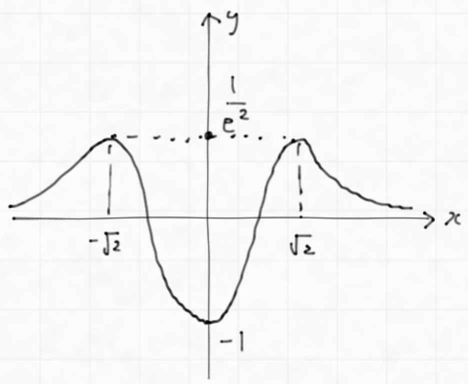
$g'(x)=2xe^{-x^2}+(x^2-1)e^{-x^2}(-2x)=2x(\sqrt{2}+x)(\sqrt{2}-x)e^{-x^2}$

また. $g(-x)=\{(-x)^2-1\}e^{-(-x)^2}=(x^2-1)e^{-x^2}=g(x)$ だから $g(x)$ は偶関数なので. $x\geqq 0$ における $g(x)$ の増減を考えると下のようになる.

x	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

$g(0)=-1$, $g(\sqrt{2})=(2-1)e^{-2}=\frac{1}{e^2}$, $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$

以上より $y=g(x)$ のグラフは下のようになる. これと $y=c$ の交点を考えると共有点の個数は下のようになる



$c>\frac{1}{e^2}$, $c<-1$ のとき　0個

$c=-1$ のとき　1個

$-1<c\leqq 0$ または $c=\frac{1}{e^2}$ のとき　2個

$0<c<\frac{1}{e^2}$ のとき　4個

大阪医科大学2019

3 (1) Z_1 と Z_1' について表にまとめる

Z_1'

Z_1 \ Z_1'	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	6
2	3	4	5	6	6	6
3	4	5	6	6	6	6
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6

左の表より、X_i の値およびその確率は次のようになる

X_i	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$

(2) $Z_1=1$ かつ $X_1+X_2=6$ となるのは、

$Z_1'=1$ のとき、 $X_1=2$ だから $X_2=4$ $\quad \frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times P(X_2=4)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}$

$Z_1'=2$ のとき、 $X_1=3$ だから $X_2=3$ $\quad \frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times P(X_2=3)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{18}$

$Z_1'=3$ のとき、 $X_1=4$ だから $X_2=2$ $\quad \frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times P(X_2=2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{36}$

$Z_1'\geqq 4$ のとき、 $X_1\geqq 5$ だから $X_1+X_2=6$ になる X_2 は存在しない。

以上より $Z_1=1$ かつ $X_1+X_2=6$ となる確率は、

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{18}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{36}=\frac{1}{36}\times\frac{12}{36}$$

また $Z_1=1$ となる確率は $\frac{1}{6}$ なので、もとめる条件つき確率は

$$\frac{\frac{1}{36}\times\frac{12}{36}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{18}$$

(3) $X_1+X_2=6$ となるのは

$X_1=2,\ X_2=4$ のとき、 $\quad P(X_1=2)\times P(X_2=4)=\frac{1}{36}\times\frac{1}{4}$

$X_1=3,\ X_2=3$ のとき $\quad P(X_1=3)\times P(X_2=3)=\frac{1}{18}\times\frac{1}{18}$

$X_1=4,\ X_2=2$ のとき $\quad P(X_1=4)\times P(X_2=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{36}$

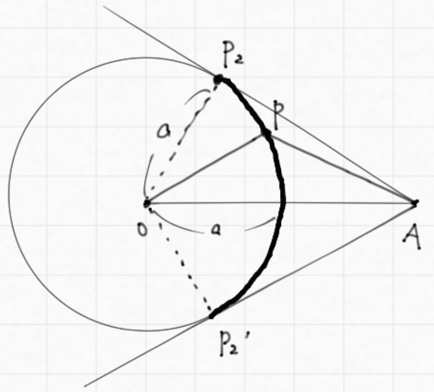
以上より $P(X_1+X_2=6)=\frac{1}{36}\times\frac{1}{4}\times 2+\left(\frac{1}{18}\right)^2=\frac{11}{36\times 18}$

(2)より $Z_1=1$ かつ $X_1+X_2=6$ となる確率は $\frac{1}{36}\times\frac{12}{36}$ だから、もとめる条件つき確率は

$$\frac{\cancel{\frac{1}{36}}\times\frac{\cancel{12}\,6}{\cancel{36}}}{\frac{11}{\cancel{36}\times\cancel{18}}}=\frac{6}{11}$$

大阪医科大学2019

4



(1) 左図において

$OP + PA \geqq OA$ より $PA \geqq OA - OP = 1 - a$

等号は P が OA 上にあるときで したがって AP の最小値は $1-a$

最大となるのは AP が C と接するとき（図中 P_2 または P_2'）

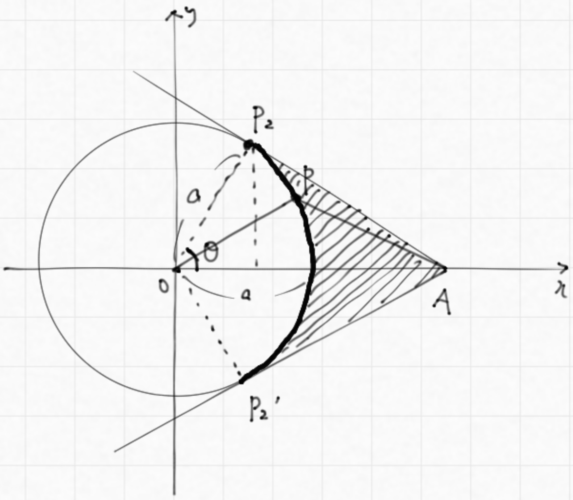
このとき $\angle OP_2A$（または $\angle OP_2'A$）は $90°$ だから

$AP_2 = \sqrt{1^2 - a^2}$ （$= AP_2'$）

以上より。

$1 - a \leqq AP \leqq \sqrt{1-a^2}$

最大値は $\sqrt{1-a^2}$ ，最小値は $1-a$



(2) S は $x^2+y^2=a^2$ の円を x 軸について回転させたものに等しく，(1) の考察より P は 弦 $P_2'P$ の A に近い側（太線部）と AP_2，AP_2' で囲まれる左図の斜線部を回転させたものが K に等しい。

$\angle AOP_2 = \theta$ とすると．（$\cos\theta = \frac{a}{1} = a$）

$$V = \pi \times (a\sin\theta)^2 \times (1 - a\cos\theta) \times \frac{1}{3} - \int_{a\cos\theta}^{a} \pi y^2\, dx$$

$$= \frac{\pi}{3} a^2 \sin^2\theta (1 - a^2) - \pi \int_{a^2}^{a} a^2 - x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\pi a^2 (1-a^2)(1-a^2) - \pi \left[a^2 x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{a^2}^{a}$$

$$= \frac{1}{3}\pi a^2 (1-a^2)^2 - \pi\left(a^3 - \frac{1}{3}a^3\right) + \pi\left(a^4 - \frac{a^6}{3}\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}\pi a^2 (a-1)^2}$$

大阪医科大学2019

5

(1) $|w_1|=|w_2|=1$ だから w_1 の偏角を θ_1 として

$$w_1=\cos\theta_1+i\sin\theta_1$$
$$w_2=\cos(\theta_1-\theta)+i\sin(\theta_1-\theta)$$

と表すことができる.

$$\begin{aligned}w_1-w_2&=\cos\theta_1+i\sin\theta_1-\left\{\cos(\theta_1-\theta)+i\sin(\theta_1-\theta)\right\}\\&=-2\sin\frac{2\theta_1-\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}+i\cdot 2\cos\frac{2\theta_1-\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\\&=-2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{2\theta_1-\theta}{2}+i\cos\frac{2\theta_1-\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

ここで $\sin\frac{2\theta_1-\theta}{2}+i\cos\frac{2\theta_1-\theta}{2}$ の大きさは $\sin^2\frac{2\theta_1-\theta}{2}+\cos^2\frac{2\theta_1-\theta}{2}=1$ だから 1

よって $|w_1-w_2|=\left|-2\sin\frac{\theta}{2}\right|\times 1=2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$

証明終

(2) $\alpha=-1=\cos\pi+i\sin\pi$

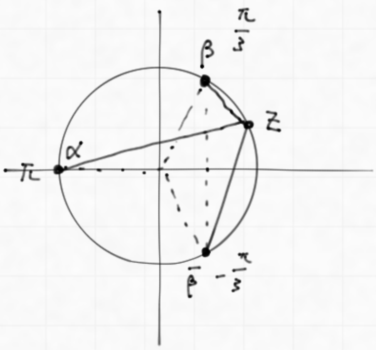
$$\beta=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\gamma=\bar{\beta}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

また, $|z|=1$ だから $z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおくことができる.

(1)の結果を用いて

$$|z-\alpha|+|z-\beta|+|z-\gamma|=2\left|\sin\frac{\theta-\pi}{2}\right|+2\left|\sin\frac{\theta-\frac{\pi}{3}}{2}\right|+2\left|\sin\frac{\theta+\frac{\pi}{3}}{2}\right|\quad\cdots①$$



①の値について考えるが、対称性に注目すると $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ のときに限定しても最大値および最小値をもとめることができる

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ のとき

$$\begin{aligned}①&=-2\sin\frac{\theta-\pi}{2}-2\sin\frac{\theta-\frac{\pi}{3}}{2}+2\sin\frac{\theta+\frac{\pi}{3}}{2}\\&=-2\sin\frac{\theta-\pi}{2}+2\cdot 2\cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=2\cos\frac{\theta}{2}+2\cos\frac{\theta}{2}=4\cos\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき最小、$\theta=0$ のとき最大　$2\sqrt{3}\leqq 4\cos\frac{\theta}{2}\leqq 4$

よって $|z-\alpha|+|z-\beta|+|z-\gamma|$ の最大値は **4**　最小値は $\mathbf{2\sqrt{3}}$