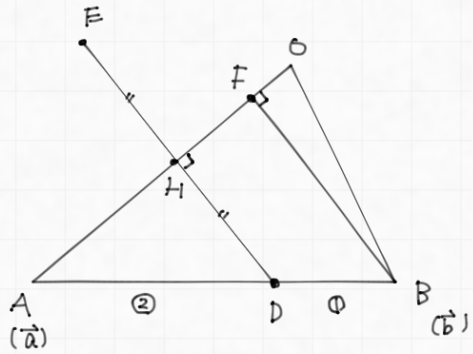
北海道大学2021

1



$|\vec{a}| = 4,\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 6$

(1) Fは OA 上にあるので $\overrightarrow{OF} = k\vec{a}$

BF⊥OA より $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{OA} = 0 \iff (k\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a} = 0$

$\iff k\cdot 4^2 - 6 = 0 \iff k = \frac{3}{8}$

$\overrightarrow{OF} = \boldsymbol{\frac{3}{8}\vec{a}}$

(2) Dは AB を 2:1 に内分するので $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

DからOAに下ろした垂線の足をHとする(Hは DEの中点)

Hは OA 上にあるので $\overrightarrow{OH} = l\vec{a}$

DH⊥OA より $\overrightarrow{DH}\cdot\vec{a} = 0 \iff (l\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b})\cdot\vec{a} = 16l - \frac{16}{3} - 4 = 0 \iff l = \frac{7}{12}$

$\overrightarrow{OH} = \frac{7}{12}\vec{a}$

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{OD} + 2(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OD}) = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{7}{6}\vec{a} = \boldsymbol{\frac{5}{6}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}}$

(3) $\triangle BDE = 2\triangle BDH = 2(1-\frac{7}{12})\triangle BDO = \frac{5}{6}\times\frac{1}{3}\triangle OAB = \frac{5}{9}$

$\triangle OAB = 2$

$\triangle OAB = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$ だから $2 = \frac{1}{2}\sqrt{16|\vec{b}|^2 - 36}$

2乗して $16 = 16|\vec{b}|^2 - 36 \quad |\vec{b}| = \boldsymbol{\frac{\sqrt{13}}{2}}$

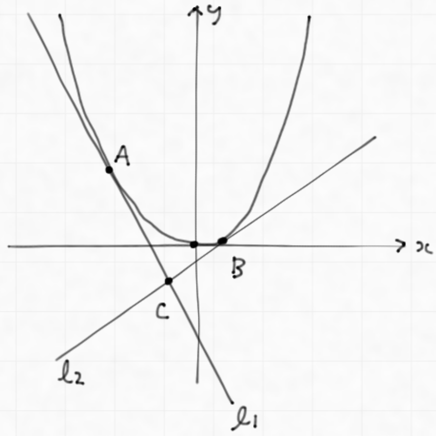
北海道大学2021

2 (1) $\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x$ だから l_1 は $y = -1\times(x+1)+\frac{1}{2}$　　$l_1 : y = -x-\frac{1}{2}$

l_2 は $y=(a+2)(x-a-2)+\frac{(a+2)^2}{2}$　　$l_2 : y=(a+2)x-\frac{1}{2}a^2-2a-2$

l_1とl_2の式を連立　$x=\frac{a+1}{2}$, $y=-\frac{a+2}{2}$　　$\therefore C\left(\frac{a+1}{2}, -\frac{a+2}{2}\right)$

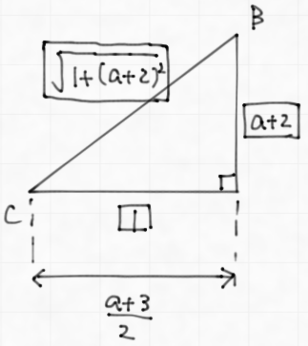
(2) 点CとAのx座標の差は $a+2-\frac{a+1}{2}=\frac{1}{2}(a+3)$



l_1の傾きが $a+2$ であることから

$$BC=\left\{(a+2)-\frac{a+1}{2}\right\}\times\sqrt{1+(a+2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}(a+3)\sqrt{a^2+4a+5}$$



$$\overrightarrow{AB}=\left(a+3,\ \frac{1}{2}a^2+2a+\frac{3}{2}\right)$$

$$AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(a+3)^2+\frac{1}{4}(a+3)^2(a+1)^2}$$

$$=(a+3)\sqrt{1+\frac{1}{4}(a+1)^2}$$

$$\left|\frac{AB}{BC}\right|=\frac{\cancel{(a+3)}\sqrt{1+\frac{1}{4}(a+1)^2}}{\frac{1}{2}\cancel{(a+3)}\sqrt{a^2+4a+5}}=\sqrt{\frac{a^2+2a+5}{a^2+4a+5}}$$

$$=\sqrt{1+\frac{-2a}{a^2+4a+5}}=\sqrt{1-\frac{2}{a+4+\frac{5}{a}}}$$

ここで $a+\frac{5}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{5}{a}}=2\sqrt{5}$ だから　$1-\frac{2}{a+\frac{5}{a}+4}\geqq 1-\frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{2}\sqrt{5}+\cancel{4}}=1-2+\sqrt{5}=\sqrt{5}-1$

だから　$\left|\frac{AB}{BC}\right|\geqq\sqrt{5}-1$　　等号は $a=\frac{5}{a}$ すなわち $a=\sqrt{5}$ のとき成り立つ

$\therefore$ $\left|\frac{AB}{BC}\right|$ が最小となる a は $\sqrt{5}$

北海道大学2021

3 (1) $3^{4x} = X$, $3^{y^2} = Y$ とおく

$9^{4x} = 3^{2^{4x}} = 3^{4x^2} = X^2$, $9^{y^2+1} = 3^{2^{y^2}} \times 9 = (3^{y^2})^2 \cdot 9 = 9Y^2$

$3^{4x+y^2} = 3^{4x} \cdot 3^{y^2} = XY$

となるので、(*)は

$$\frac{X^2 + 9Y^2}{6} = XY \quad \Leftrightarrow \quad 9Y^2 - 6XY + X^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3Y - X)^2 = 0$$

よって $Y = \frac{1}{3}X$

つまり $3^{y^2} = \frac{1}{3} \cdot 3^{4x} \Leftrightarrow 3^{y^2} = 3^{4x-1}$

底を3とする対数をとると $\boldsymbol{y^2 = 4x - 1}$

(2) $\frac{x}{y} = t$ とおくと. $1 - t > 0 \Leftrightarrow t < 1$ …①

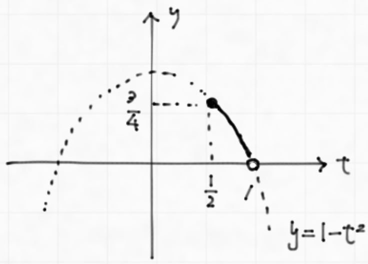
(1)の結果より $x = \frac{1}{4}(y^2+1)$ だから $t = \frac{x}{y} = \frac{1}{4}\left(y + \frac{1}{y}\right)$

$y > 0$ なので相加相乗平均の公式より $\frac{1}{4}\left(y + \frac{1}{y}\right) \geqq \frac{1}{4} \times 2\sqrt{y \cdot \frac{1}{y}} = \frac{1}{2}$ …②

① ② より $\frac{1}{2} \leqq t < 1$ …③

$$\frac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}} 4} + \frac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}} 4} = \frac{1}{\log_{1+t} 4} + \frac{1}{\log_{1-t} 4} = \log_4(1+t) + \log_4(1-t) = \log_4(1-t^2)$$

ここで ③ のとき $1-t^2$ の値は. 右グラフのように変わるので



$0 < 1 - t^2 < \frac{3}{4}$

$\log_4(1-t^2) \leqq \log_4 \frac{3}{4} = \boldsymbol{\log_4 3 - 1}$

北海道大学2021

4 (1) $a_2 = 2a_1 + 3b_1 = 2\cdot2 + 3\cdot1 = 7$

$b_2 = a_1 + 2b_1 = 2 + 2\cdot1 = 4$

$c_2 = a_2 \cdot b_2 = 7\cdot4 = 28$

(2) 「a_n と b_n はいずれか一方が偶数で、もう一方は奇数」という命題を数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき、 $a_1 = 2$、$b_1 = 1$ だから命題は成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき、 a_k と b_k のいずれか一方が偶数で、もう一方は奇数だと仮定する

$$a_{k+1} - b_{k+1} = 2a_k + 3b_k - (a_k + 2b_k)$$

$$= a_n + b_n$$

仮定より、$a_k + b_k$ は奇数となるので、 $a_{k+1} - b_{k+1}$ も奇数。

$a_{k+1} - b_{k+1}$ が奇数となるのは、a_{k+1} と b_{k+1} の偶奇が一致しないときに限られるので、

a_{k+1}、b_{k+1} の いずれか一方が偶数で、もう一方は奇数で、$n=k$ のとき命題が成り立てば

$n=k+1$ のときも成り立つ。

(i)(ii) より、命題は全ての自然数 n について成り立つ。

これは $a_n \times b_n$ が全ての n について偶数であることを示しており、c_n は偶数である。

(3) (i) $n = 2$ のとき (1) より $c_2 = 28$ だから、 c_n は 28 で割り切れる。

(ii) $n = 2k$ のとき、

c_{2k} が 28 で割り切れると仮定する

$$c_{2k} \equiv 0 \pmod{28}$$

$$a_{2k+2} = 2a_{2k+1} + 3b_{2k+1} = 2(2a_{2k} + 3b_{2k}) + 3(a_{2k} + 2b_{2k}) = 7a_{2k} + 12b_{2k}$$

$$b_{2k+2} = a_{2k+1} + 2b_{2k+1} = 2a_{2k} + 3b_{2k} + 2(a_{2k} + 2b_{2k}) = 4a_{2k} + 7b_{2k}$$

$$c_{2k+2} = a_{2k+2} \cdot b_{2k+2} = (7a_{2k} + 12b_{2k})(4a_{2k} + 7b_{2k})$$

$$= 28a_{2k}^2 + 97a_{2k}b_{2k} + 84b_{2k}^2$$

$$= 28(a_{2k}^2 + 3b_{2k}^2) + 97a_{2k}b_{2k}$$

$$\equiv 0 \pmod{28}$$

よって c_{2k} が 28 で割り切れると c_{2k+2} も 28 で割り切れる。

(i)(ii) より数学的帰納法により、n が偶数のとき c_n は 28 で割り切れる

北海道大学2021

5 $x=(1+\cos\theta)\cos\theta$, $y=\sin\theta$

(1) $\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta+2\cos\theta(-\sin\theta)=-\sin\theta(1+2\cos\theta)$

$\dfrac{dx}{d\theta}=0$ となるのは $\sin\theta=0$ または $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ のときで

$\theta=0,\ \pi,\ \frac{2}{3}\pi$

θ	0	…	$\frac{2}{3}\pi$	…	π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	−	0	+	0
x	2	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0

xについての増減は右のようになる

$\theta=0$ のとき $x=(1+1)\times1=2$.

$\theta=\frac{2}{3}\pi$ のとき $x=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$

$\theta=\pi$ のとき $x=(1-1)\times(-1)=0$

以上よりxの最小値は $-\frac{1}{4}$ $\therefore a=-\frac{1}{4}$

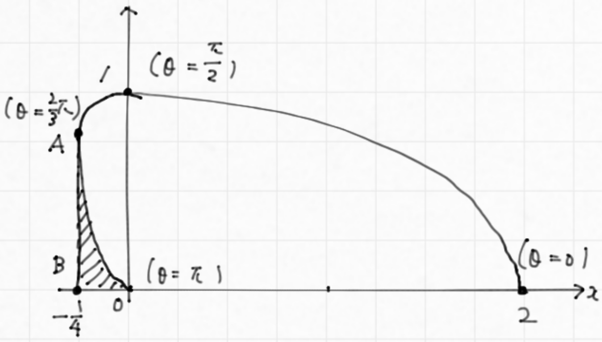
(2) $\dfrac{dy}{d\theta}=\cos\theta$ $\dfrac{dy}{d\theta}=0$ となるのは $\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき.

θ	0	…	$\frac{\pi}{2}$	…	$\frac{2}{3}\pi$	…	π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	−		−	0	+	0
$\frac{dy}{d\theta}$		+	0	−		−	
x	2	←	0	←	$-\frac{1}{4}$	→	0
y	0	↑	1	↓	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↓	0

(x,y)の増減は右のようになり. グラフの概形は右下のようになる.

面積を求める図形は右下グラフ斜線部分で.

この面積をSとして



$$S=\int_{-\frac{1}{4}}^{0}y\,dx=\int_{-\frac{1}{4}}^{0}\sin\theta\,dx$$

(1)より $\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta-2\cos\theta\sin\theta$ を用いて

$$S=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}-\sin^2\theta-2\cos\theta\sin^2\theta\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}-\frac{1-\cos2\theta}{2}-2\sin^2\theta(\sin\theta)'\,d\theta$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta-\frac{2}{3}\sin^3\theta\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$$

$$=-\frac{1}{2}\pi+0+0-\left(-\frac{1}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{8}_{4}}\right)=-\frac{1}{6}\pi+\frac{3}{8}\sqrt{3}=\mathbf{\frac{3}{8}\sqrt{3}-\frac{1}{6}\pi}$$