福井大 2020 工

1 (1) $f(x) = 2x$

$(a_n, f(a_n))$ における接線は $y = 2a_n(x - a_n) + a_n^2 - 4$ より $y = 2a_n x - a_n^2 - 4$

$n=1$ のとき $y = 2a_1 x - a_1^2 - 4 = 8x - 20$ これと x 軸との交点が a_2 だから

$$a_2 = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

$y = 2a_n x - a_n^2 - 4$ の y 切片は $-a_n^2 - 4$ で、これは必ず負の値をとることから $a_n = 0$ となることはない。したがって

$y=0$ のとき $2a_n x = a_n^2 + 4$ より $x = \dfrac{a_n^2+4}{2a_n}$ $\quad \therefore \ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+4}{2a_n}$

(2)

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1} - 2}{a_{n+1} + 2} = \frac{\frac{a_n^2+4}{2a_n} - 2}{\frac{a_n^2+4}{2a_n} + 2} = \frac{a_n^2 + 4 - 4a_n}{a_n^2 + 4 + 4a_n} = \left(\frac{a_n - 2}{a_n + 2}\right)^2 = b_n^2$$

$\therefore \ b_{n+1} = b_n^2$

(3) (2) の結果について底を3とする対数をとる。

$$\log_3 b_{n+1} = 2\log_3 b_n$$

$$c_{n+1} = 2c_n$$

また $c_1 = \log_3 b_1 = \log_3 \dfrac{4-2}{4+2} = -1$ なので $c_n = -2^{n-1}$

(4) $c_n = -2^{n+1} = \log_3 b_n$ より $b_n = 3^{-2^{n-1}}$

$b_n = \dfrac{a_n - 2}{a_n + 2}$ より $b_n a_n + 2b_n = a_n - 2$

$$a_n = \frac{-2-2b_n}{b_n - 1} = \frac{2(3^{-2^{n-1}} + 1)}{1 - 3^{-2^{n-1}}} = \frac{2(3^{2^{n-1}} + 1)}{3^{2^{n-1}} - 1}$$

2　$f(x) = \tan x - 8\sin x \quad \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right)$

(1)　$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 8\cos x$

$f'(x) = 0$ となるのは　$\cos^3 x - \frac{1}{8} = 0$　より　$\cos x = \frac{1}{2}$ のときで　$x = \frac{\pi}{3}$

したがって $f(x)$ の増減は下のようになる

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘		↗	

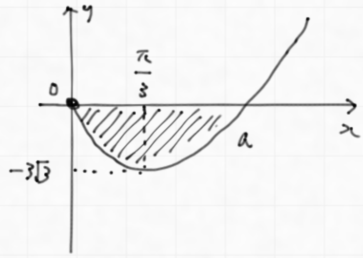
$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{3} - 8\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{-3\sqrt{3}}$　　$\left(x = \frac{\pi}{3}\text{のとき}\right)$

(2)　$f(x) = \tan x - 8\sin x = 0 \iff \frac{\sin x}{\cos x} - 8\sin x = 0 \iff \sin x\,(1 - 8\cos x) = 0.$

$\iff \sin x = 0$ または $\cos x = \frac{1}{8}$

$0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ のとき　$\sin x \neq 0$ だから.　$\cos x = \frac{1}{8}$, $0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ を満たす x が a　すなわち $\mathbf{\cos a = \frac{1}{8}}$

(3)　(1)(2)より グラフの概形は右のようになっており.



面積をもとめる図形は右図斜線部分

$$S = \int_0^a |f(x)|\,dx = \int_0^a 8\sin x - \tan x\,dx$$

$$= \Big[-8\cos x + \log|\cos x|\Big]_0^a = -8\cos a + \log|\cos a| + 8 - 0$$

$$= 8 - 8\cos a + \log\cos a$$

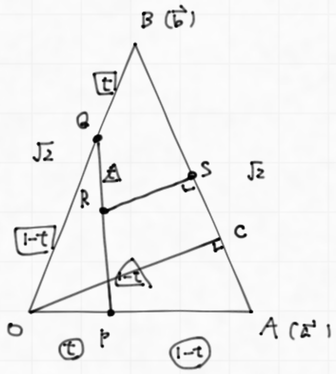
$\cos a = \frac{1}{8}$ を代入して　$S = 8 - 8\cdot\frac{1}{8} + \log\frac{1}{8} = \mathbf{7 - 3\log 2}$

3

(1) $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2} \iff |\vec{b}-\vec{a}|^2=2 \iff 1+2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=2$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$



(2) CはAB上にあるので $AC:CB=u:1-u$ として

$\overrightarrow{OC}=(1-u)\overrightarrow{OA}+u\overrightarrow{OB}=(1-u)\vec{a}+u\vec{b}$

$OC\perp AB$ だから $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\{(1-u)\vec{a}+u\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$(1-u)\times\dfrac{1}{2}-(1-u)\times 1+u\times 2-u\times\dfrac{1}{2}=0$ $\qquad u=\dfrac{1}{4}$ $\qquad \therefore\ \overrightarrow{OC}=\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OR}+s\,\overrightarrow{OC}$

$=t^2\vec{a}+(1-t)^2\vec{b}+\dfrac{3}{4}s\vec{a}+\dfrac{1}{4}s\vec{b}$

SはAB上にあるので、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の係数の和は1

$\left(t^2+\dfrac{3}{4}s\right)+\left\{(1-t)^2+\dfrac{1}{4}s\right\}=1$

$s=1-t^2-(1-t)^2=2t-2t^2$

よって $\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OR}=2t(1-t)\overrightarrow{OC}=\dfrac{t(1-t)}{2}(3\vec{a}+\vec{b})$

(4) $\dfrac{t(1-t)}{2}=-\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{2}t=-\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{8}$

したがって $|\overrightarrow{RS}|$ は $t=\dfrac{1}{2}$ のとき最も長くなり $|\overrightarrow{RS}|=\dfrac{1}{8}|3\vec{a}+\vec{b}|$

$|3\vec{a}+\vec{b}|^2=9+2+6\cdot\dfrac{1}{2}=14$ だから $|\overrightarrow{RS}|\leqq\dfrac{\sqrt{14}}{8}$

$\triangle RAB=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot RS\leqq\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{14}}{8}=\dfrac{\sqrt{7}}{8}$

4

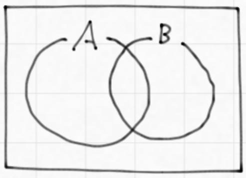
(1) 3または5の番号を取り出し続ける $\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$

(2) 奇数でかつ3で割り切れないのは5の番号を引き続けたとき $\left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{625}$

よって、もとめる確率は $\dfrac{\frac{1}{625}}{\frac{16}{625}} = \frac{1}{16}$

(3) カードの取り出し方は $5^4 = 625$ 通り。これを全事象 U とし、そのうち、

奇数を A 3で割り切れない集合を B と表すと、(1) (2) より、



$n(A) = 2^4 = 16$

$n(A \cap B) = 1^4 = 1$

B は 2.4.5 の番号を引き続けたときのことだから $n(B) = 3^4 = 81$

以上より $n(\overline{A} \cap B) = n(B) - n(A \cap B) = 81 - 1 = 80$

よって、もとめる確率を $P(\overline{A} \cap B)$ と表すと

$$P(\overline{A} \cap B) = \frac{n(\overline{A} \cap B)}{n(U)} = \frac{80}{625} = \frac{16}{125}$$

(4) 6の倍数は偶数かつ3の倍数 $\overline{A} \cap \overline{B}$

$$n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A) - n(\overline{A} \cap B) = 625 - 16 - 80 = 529$$

よって、もとめる確率 $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ は

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{n(\overline{A} \cap \overline{B})}{n(U)} = \frac{529}{625}$$