琉球大学2021 乙　60分

問 (1) 不等式 $(x^2+y^2-2)(y-x^2)>0$ の表す領域を図示せよ.

(2) 15334 と 30381 の最大公約数を求めよ.

(3) 方程式 $2^x-(\sqrt{2})^{x+1}-4=0$ を解け

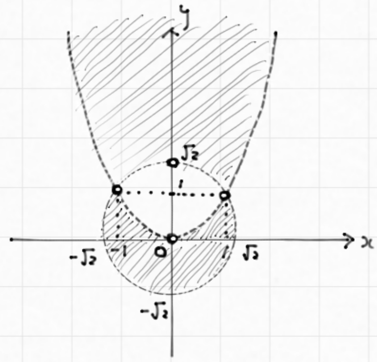
(1) (i) $x^2+y^2>2$ かつ $y>x^2$

(ii) $x^2+y^2<0$ かつ $y<x^2$ のいずれか.

$x^2+y^2=2$ と $y=x^2$ の交点は $y+y^2=2$ を解いて $y=1,-2$

$x^2=2-y^2\geq 0$ だから $-\sqrt{2}\leq y\leq\sqrt{2}$ なので. 交点は $(x,y)=(1,\pm 1)$

領域は右のようになる (境界, 交点除く)



(2) $30381\div 15334=1\cdots 15047$

$15334\div 15047=1\cdots 287$

$15047\div 287=52\cdots 123$

$287\div 123=2\cdots 41$

$123\div 41=3$

a. b の最大公約数を $g(a,b)$ と表すと. 上の結果より

$g(30381,1534)=g(15334,15047)=g(15047,287)=g(287,123)=g(123,41)=41$

よって 最大公約数は **41**

(3) $\sqrt{2}^x=X$ とおく (このとき $X=\sqrt{2}^x>0$)　$X^2={\sqrt{2}^x}^2={\sqrt{2}^2}^x=2^x$ だから. 与式は

$X^2-\sqrt{2}X-4=0$

$(X-2\sqrt{2})(X+\sqrt{2})=0$

$X=2^{\frac{3}{2}},-2^{\frac{1}{2}}$

$X>0$ を満たすのは　$X=2^{\frac{3}{2}}$

$\therefore\ 2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{2}^x=2^{\frac{x}{2}}$　　$\therefore\ x=\mathbf{3}$

問　関数 $f(x)=x^3-3x^2+4$ について、次の各問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ の極値を調べ、そのグラフを書け。

(2) 曲線 $y=f(x)$ について、傾きが9でy切片が正である接線の方程式を求めよ。

(3) (2)で求めた接線と曲線 $y=f(x)$ によって囲まれる部分の面積を求めよ。

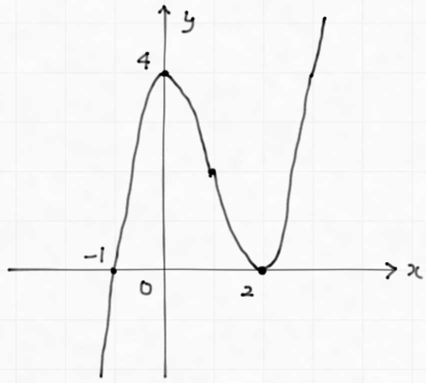
(1) $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$　　$f'(x)=0$ を解くと $x=0, 2$

$f(x)$ の増減は下の通り

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$f(0)=4$, $f(2)=0$

グラフは右のようになる



(2) $f'(x)=9$ となるのは　$3x^2-6x=9 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$ より $x=3, -1$

グラフより y切片が正となるのは $x=-1$ のときで

$y=9(x+1)+0 \Leftrightarrow \mathbf{y=9x+9}$

(3) $y=9x+9$ と $y=f(x)$ の交点は　$x^3-3x^2+4=9x+9 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-5)=0$ より $x=-1, 5$

面積をSとして

$$S=\int_{-1}^{5} 9x+9-(x^3-3x^2+4)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{5}-(x+1)^2(x-5)\,dx=\int_{-1}^{5}-(x+1)^3+6(x+1)^2\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}(x+1)^4+2(x+1)^3\right]_{-1}^{5}=-\frac{1}{4}\times 6^4+2\times 6^3=6^3\left(2-\frac{3}{2}\right)=\mathbf{108}$$