東海大学 2020

1

(1) $y=3\left(x-\frac{4}{3}a\right)^2-\frac{16}{3}a^2+6b$ $\quad \frac{4}{3}a=4 \quad a=\mathbf{3}$ $\quad -\cancel{\frac{16}{3}}^{8}\times\cancel{3}^{2}+\cancel{6b}=\cancel{-12}^{-2} \quad b=\mathbf{6}$

(2) $\frac{1}{2}\times\frac{{}_4C_1\times{}_1C_1}{{}_5C_2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{10}+\frac{1}{5}\right)=\mathbf{\frac{3}{10}}$

(3) $3^x=X$ として $\quad X^2-4\cdot3X+32=0 \quad X=4.8$

$3^x=4 \Leftrightarrow x=\log_3 4=2\log_3 2=\mathbf{2}a$

$3^x=8 \Leftrightarrow x=\log_3 8=3\log_3 2=\mathbf{3}a$

(4) $a_n=an-b$ として. $\quad a_4=4a-b=1, \quad a_{10}=10a-b=13 \quad a=2,\ b=7$

$a_n=\mathbf{2}n-\mathbf{7}$

$\sum_{k=10}^{20}a_k=\frac{a_{10}+a_{20}}{2}\times11=\frac{13+33}{2}\times11=24\times11=\mathbf{264}$

(5) 27 29 35 35 45

$x\leqq35$ のとき, 第1,第3四分位数は 29 または x と 35 $\quad 35-29=6\neq10$ だから

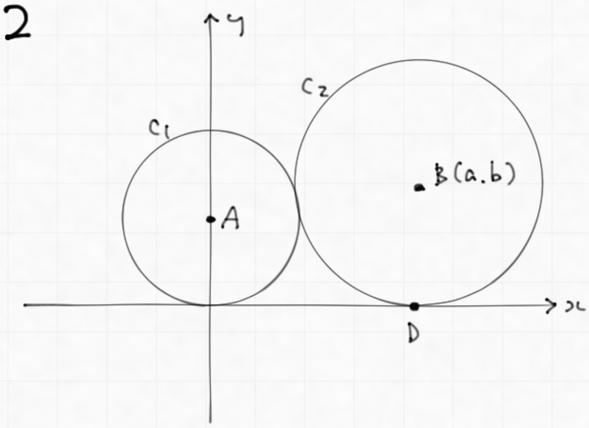
$35-x=10$ とならなければいけないが, このとき x は第1四分位数ではない.

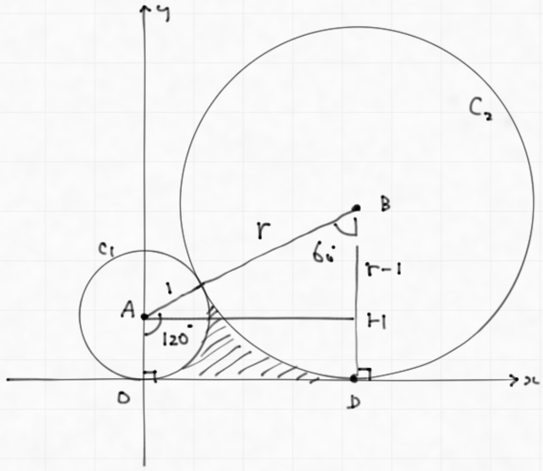
$x>35$ のとき, 第1四分位数は 29 したがって $x=39$ となれば条件を満たす $\quad x=\mathbf{39}$

このとき 6つのデータの平均は $\frac{1}{6}(27+29+35+35+39+45)=35$

分散は $\quad \frac{1}{6}\left\{(-8)^2+(-6)^2+0^2+0^2+4^2+10^2\right\}=\frac{216}{6}=\mathbf{36}$

2





(1) $x^2+(y-1)^2=1$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-\mathbf{2}\cdot y=\mathbf{0}$ … ①

(2) $AB=\sqrt{a^2+(b-1)^2}=1+b$

$a^2+\cancel{b^2}-2b+\cancel{1}=\cancel{1}+2b+\cancel{b^2}$ $\quad b=\mathbf{\frac{1}{4}}a^2$

$b=2$ のとき、$a=2\sqrt{2}$

C_2 は $(x-2\sqrt{2})^2+(y-2)^2=2^2$

$x^2+y^2-\mathbf{4\sqrt{2}}x-\mathbf{4}y+\mathbf{8}=0$ … ②

② − ① $\quad -4\sqrt{2}x-2y+8=0$

$y=-2\sqrt{2}x+4$ を ① に代入

$x^2+8x^2-16\sqrt{2}x+16+4\sqrt{2}x-8=0$

$9x^2-12\sqrt{2}x+8=0$

$(3x-2\sqrt{2})^2=0$

$x=\mathbf{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$, $y=-2\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}+4=\mathbf{\frac{4}{3}}$

(3) $\angle ABD=\mathbf{60^\circ}$

$\triangle ABH$ は $\angle B=60°$ の直角三角形 $\quad 1+r:r-1=2:1 \quad \therefore\ r=3$

$OD=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4=2\sqrt{3}=a$. $\quad b=r=3$

$(x-2\sqrt{3})^2+(y-3)^2=3^2$

$x^2+y^2-\mathbf{4\sqrt{3}}x-\mathbf{6}y+\mathbf{12}=0$

斜線部 = 台形 − C_1の扇形 − C_2の扇形

$=\frac{1+3}{2}\times 2\sqrt{3}-\pi\cdot 1^2\cdot\frac{120}{360}-\pi\cdot 3^2\cdot\frac{60°}{360}$

$=4\sqrt{3}-\frac{1}{3}\pi-\frac{3}{2}\pi=\mathbf{4\sqrt{3}}-\mathbf{\frac{11}{6}}\pi$

3

(1) $3\sin\theta = 2\cos\theta \qquad \therefore \tan\theta = \frac{2}{3}$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}\cdot 4}{5\cdot\cancel{3}} = \frac{12}{5}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{1+\frac{4}{9}} = \frac{9}{13}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{18}{13} - 1 = \frac{5}{13}$$

$$\sin 2\theta = \cos 2\theta \times \tan 2\theta = \frac{12}{5}\times\frac{5}{13} = \frac{12}{13}$$

$B\left(\frac{15}{13},\ -\frac{24}{13}\right)$

(2) $\vec{OA}\cdot\vec{OB} = 6\cos\theta\cos 2\theta - 6\sin\theta\sin 2\theta$

$= 6\cos 3\theta = 0$

$3\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$

$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}n\pi$

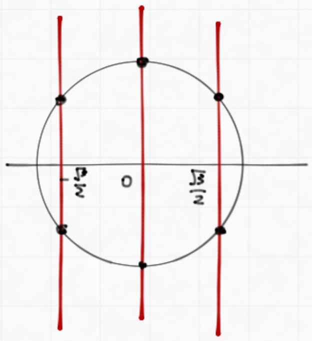
$0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たすものは　$\theta = \frac{1}{6}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$ の **6** 個

最大のものは $\frac{11}{6}\pi$

(3) $|\vec{OA}|^2 = 4\cos^2\theta + 9\sin^2\theta = 9 - 5\cos^2\theta$

$|\vec{OB}|^2 = 9\cos^2 2\theta + 4\sin^2 2\theta = 4 + 5\cos^2 2\theta = 4 + 5(2\cos^2\theta - 1)^2 = 20\cos^4\theta - 20\cos^2\theta + 9$

$|\vec{OA}|^2 = |\vec{OB}|^2 \qquad \cancel{9} - \cancel{5}\cos^2\theta = \overset{4}{\cancel{20}}\cos^4\theta - \overset{4}{\cancel{20}}\cos^2\theta + \cancel{9}$



$\cos^2\theta(4\cos^2\theta - 3) = 0 \qquad \cos^2\theta = \frac{3}{4}$ のとき $|\vec{OB}|^2 = 20\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 20\cdot\left(\frac{3}{4}\right) + 9 = \frac{21}{4} > 0$

$\therefore \cos\theta = 0,\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$ の **6** 個

最も小さいのは $\theta = \frac{1}{6}\pi$ で

$A\left(\sqrt{3},\ \frac{3}{2}\right),\ B\left(\frac{3}{2},\ -\sqrt{3}\right)$

このとき $\triangle OAB = \frac{1}{2}\left|\sqrt{3}(-\sqrt{3}) - \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\right| = \frac{21}{8}$

4

(1) $f(x) = 3x^2 - 8x + 3$

$f'(0) = 3$

接点を$(t, f(t))$として、接線は、

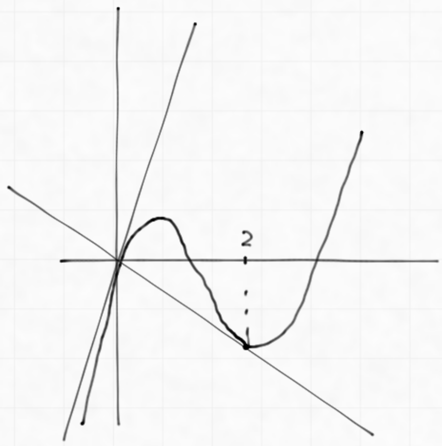
$$y = (3t^2-8t+3)(x-t) + t^3-4t^2+3t$$

これが原点を通るとき.

$$0 = -3t^3+8t^2-3t+t^3-4t^2+3t$$

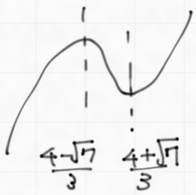
$t^3-2t^2=0 \qquad t=0, 2$

$t=2$のとき $f'(2) = 12-16+3 = -1$



$$S = \int_0^2 (x-2)^2 x\,dx = \int_0^2 (x-2)^3 + 2(x-2)^2\,dx = \left[\frac{1}{4}(x-2)^4 + \frac{2}{3}(x-2)^3\right]_0^2 = -4 + \frac{16}{3} = \frac{4}{3}$$

(2) $f(x) = 0$ を解くと $\quad x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-9}}{3} = \dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}$



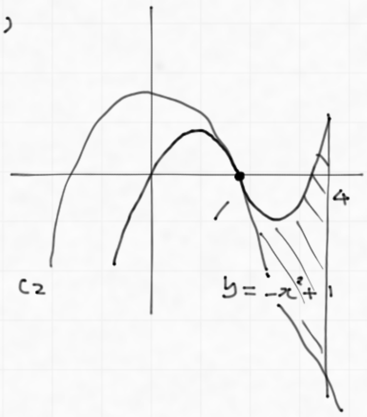
$x = \dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$ で極小となる

$$\begin{array}{ccc|cccc}
 & & & \frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & & \\
\hline
3 & -8 & 3 & 1 & -4 & 3 & 0 \\
 & & & 1 & -\frac{8}{3} & 1 & \\
\hline
 & & & & -\frac{4}{3} & 2 & 0 \\
 & & & & -\frac{4}{3} & \frac{32}{9} & -\frac{4}{3} \\
\hline
 & & & & & -\frac{14}{9} & \frac{4}{3}
\end{array}$$

$f(x) = x^3-4x^2+3x = (3x^2-8x+3)\left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}\right) - \frac{14}{9}x + \frac{4}{3}$ だから

$$f\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right) = -\frac{14}{9} \times \frac{4+\sqrt{7}}{3} + \frac{4}{3} = \frac{-20 - 14\sqrt{7}}{27}$$

(3)



$x^3-4x^2+3x = -x^2+1$

$x^3-3x^2+3x-1 = 0$

$(x-1)^3 = 0$

$x = 1. \qquad y = -1+1 = 0 \qquad (1, 0)$

$$\int_1^4 (x-1)^3\,dx = \left[\frac{1}{4}(x-1)^4\right]_1^4 = \frac{3^4}{4} = \frac{81}{4}$$