大阪公立大学2022前期

1

(1) $g(x) = \log(1+x) - (x - \frac{x^2}{2})$ とおく

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1-1-x+x+x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$$

$x \geqq 0$ のとき $g'(x) \geqq 0$ だから $x \geqq 0$ において $g(x)$ は単調に増加する

したがって $x \geqq 0$ において $g(x) \geqq g(0) = \log 1 - 0 + 0 = 0$

よって $x \geqq 0$ において $x - \frac{x^2}{2} \leqq \log(1+x^2)$ が成り立っている.

$h(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \log(1+x)$ とおく

$$h'(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x} = \frac{\cancel{1} + \cancel{x} - \cancel{x} - \cancel{x^2} + \cancel{x^2} + x^3 - \cancel{1}}{1+x} = \frac{x^3}{1+x}$$

$x \geqq 0$ において $h'(x) \geqq 0$ だから $x \geqq 0$ において $h(x)$ は単調に増加する

したがって $x \geqq 0$ において $h(x) \geqq h(0) = 0 - 0 + 0 - \log 1 = 0$

よって $x \geqq 0$ において $\log(1+x) \leqq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ が成り立っている.

以上より $x \geqq 0$ のとき

$$x - \frac{x^2}{2} \leqq \log(1+x^2) \leqq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$ が成り立つことが示された.

(2) $\log e^{nt}(1+\frac{t}{n})^{-n^2} = nt - n^2\log(1+\frac{t}{n})$

ここで(1)より $(\frac{t}{n}) - \frac{1}{2}(\frac{t}{n})^2 \leqq \log(1+\frac{t}{n}) \leqq \frac{t}{n} - \frac{1}{2}(\frac{t}{n})^2 + \frac{1}{3}(\frac{t}{n})^3$

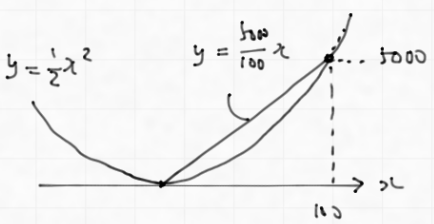
$$nt - \frac{1}{2}t^2 \leqq n^2\log(1+\frac{t}{n}) \leqq nt - \frac{1}{2}t^2 + \frac{t^3}{3n}$$

$$\frac{1}{2}t^2 + \frac{t^3}{3n} \leqq nt - n^2\log(1+\frac{t}{n}) \leqq \frac{1}{2}t^2$$

$$e^{\frac{1}{2}t^2 + \frac{t^3}{3n}} \leqq e^{nt}(1+\frac{t}{n})^{-n^2} \leqq e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{2}t^2 + \frac{t^3}{3n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{2}t^2} = e^{\frac{1}{2}t^2}$ だから. はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty} e^{nt}(1+\frac{t}{n})^{-n^2} = e^{\frac{1}{2}t^2}$

(3) $\int_0^{100} e^{\frac{1}{2}t^2}dt$ について



左図より $0 \leqq x \leqq 100$ の範囲で $\frac{1}{2}x^2 \leqq 50x$

したがって

$$\int_0^{100} e^{\frac{1}{2}t^2}dt \leqq \int_0^{100} e^{50t}dt = \frac{1}{50}[e^{50t}]_0^{100}$$

$$= \frac{e^{5000}}{50} - \frac{1}{50} < \frac{e^{5000}}{50}$$

証明終

2

(1) $P_n = 1 \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = 1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \times \frac{1}{6} = \frac{5^{n-2}}{6^{n-1}}$

(2) $S_n = \sum_{k=2}^{n} P_k = \frac{5^0}{6^{2-1}} \times \frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}{1-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6} \times 6 \times \left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right) = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

(3) $1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \geqq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \leqq \frac{1}{2}$

$n=4$ のとき $\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} > \frac{1}{2}$

$n=5$ 〃 $\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} < \frac{1}{2}$ 　　$n=5$ のとき初めて $S_n \geqq \frac{1}{2}$ となる

(4) $E_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}$

$$
\begin{aligned}
E_n &= \frac{2}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^0 + \frac{3}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^1 + \frac{4}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \cdots + \frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \\
-)\ \frac{5}{6}E_n &= \qquad\qquad \frac{2}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^1 + \frac{3}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \cdots + \frac{n-1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + \frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\
\hline
\frac{1}{6}E_n &= \frac{2}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^0 + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^1 + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} - \frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{6}E_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}}{1-\frac{5}{6}} - \frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

$E_n = 2 + 5 - 5\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} - n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

$E_n = 7 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}(6+n)$

3 (1) $7x+11y=1$ $x=-3,\ y=2$

(2) $6x+9y=3(2x+3y)$ だから 左辺は必ず3の倍数.

しかし右辺は1なので. $6x+9y=1$ を満たす x, y は存在しない

(3) $px+qy=1$ を満たす x, y を x_0, y_0 と表す.

X_p の要素の1つ $\left(\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}\right)^{ky_0}$ と

X_q の 〃 $\left(\cos\frac{2\pi}{q}+i\sin\frac{2\pi}{q}\right)^{kx_0}$ の積は

$$\left(\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}\right)^{ky_0}\times\left(\cos\frac{2\pi}{q}+i\sin\frac{2\pi}{q}\right)^{kx_0}$$

$$=\cos\left(\frac{2\pi}{p}ky_0+\frac{2\pi}{q}kx_0\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{p}ky_0+\frac{2\pi}{q}kx_0\right)$$

$$=\cos\left(2\pi k\frac{qy_0+px_0}{pq}\right)+i\sin\left(2\pi k\frac{qy_0+px_0}{pq}\right)\ \cdots ①$$

ここで $px_0+qy_0=1$ だから ①は

$$① = \cos\frac{2\pi}{pq}k + i\sin\frac{2\pi}{pq}k$$

$$=\left(\cos\frac{2\pi}{pq}+i\sin\frac{2\pi}{pq}\right)^k$$

これは X_{pq} の要素である. よって X_{pq} の全ての要素は X_p. X_q の要素の積で表すことができる.

(4) $\cos\frac{2\pi}{pq}+i\sin\frac{2\pi}{pq}$ が X_p に属する数 $\left(\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}\right)^l$ (lは整数) と X_q に属する数 $\left(\cos\frac{2\pi}{q}+i\sin\frac{2\pi}{q}\right)^m$ (mは整数)の積で表されるとき. p, q の最大公約数が g (gは2以上の整数) だと仮定する.

このとき. 条件より

$$\cos\frac{2\pi}{pq}+i\sin\frac{2\pi}{pq} = \left(\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}\right)^l\left(\cos\frac{2\pi}{q}+i\sin\frac{2\pi}{q}\right)^m$$

が成り立つ. 両辺の偏角は等しいので. 整数 N を用いて

$$\frac{2\pi}{pq} = \frac{2\pi}{p}l+\frac{2\pi}{q}m+2\pi N$$

が成り立つ. $\frac{pq}{2\pi}$ 倍して.

$$1 = ql+pm+pqN$$

ここで上式の右辺は g の倍数であるが左辺は1だから上式は成立しない.

したがって仮定は矛盾しており. 題意の条件の下で p, q は互いに素である.

4

(1) 左辺 $= (2\cos t + \cos 2t)\sin\frac{\alpha}{2} + (2\sin t - \sin 2t)\cos\frac{\alpha}{2}$

$= \left(2\cos t\sin\frac{\alpha}{2} + 2\sin t\cos\frac{\alpha}{2}\right) - \left(-\cos 2t\sin\frac{\alpha}{2} + \sin 2t\cos\frac{\alpha}{2}\right)$

$= 2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(2t - \frac{\alpha}{2}\right)$

$=$ 右辺

証明終

(2) 左辺 $= f(t)\sin\frac{\alpha}{2} + g(t)\cos\frac{\alpha}{2} - \left(f(\alpha)\sin\frac{\alpha}{2} + g(\alpha)\cos\frac{\alpha}{2}\right)$

$= 2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(2t-\frac{\alpha}{2}\right) - 2\sin\frac{3}{2}\alpha + \sin\frac{2}{2}\alpha$ (∵ (1))

$= 2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right) - \left\{\sin\left(2t-\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\frac{3}{2}\alpha\right\}$

$= 2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right) - 2\sin\frac{2t+\alpha}{2}\cos\frac{2t-2\alpha}{2}$

$= 2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)\left\{1 - \cos 2\cdot\frac{t-\alpha}{2}\right\}$

$= 2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right) \times 2\left(\sin\frac{t-\alpha}{2}\right)^2$

$= 4\left(\sin\frac{t-\alpha}{2}\right)^2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)$

$=$ 右辺

証明終

(3) $f'(t) = -2\sin t - 2\sin 2t$, $g'(t) = 2\cos t - 2\cos 2t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx} = g'(t)\times\frac{1}{f'(t)} = \frac{\cos 2t - \cos t}{\sin t + \sin 2t} = \frac{2\cos^2 t - \cos t - 1}{\sin t + 2\sin t\cos t} = \frac{\cancel{(2\cos t+1)}(\cos t - 1)}{\sin t\,\cancel{(1+2\cos t)}} = -\frac{1-\cos t}{\sin t}$$

したがって $\tan\theta = -\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = -\tan\frac{\alpha}{2} = \tan\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$

よって $\theta = -\frac{\alpha}{2}$ $\left(∵ 0<\alpha<\frac{2}{3}\pi\right)$

(4) 接線の法線ベクトルの1つは $(g'(\alpha), -f'(\alpha))$

接線は $(f(\alpha), g(\alpha))$ を通るので

L_α: $g'(\alpha)(x - f(\alpha)) - f'(\alpha)(y - g(\alpha)) = 0$

これと C_1, C_2 との交点の x 座標は $x = f(t)$, $y = g(t)$ を代入して

$g'(\alpha)(f(t) - f(\alpha)) - f'(\alpha)(g(t) - g(\alpha)) = 0$

を満たしている

$f'(\alpha) = -2\sin\alpha - 2\sin 2\alpha = -2\sin\alpha(1+2\cos\alpha)$

$g'(\alpha) = -2(\cos\alpha - 1)(2\cos\alpha + 1)$

を代入. ここで $0<\alpha<\frac{2}{3}\pi$ のとき $2\cos\alpha + 1 \neq 0$ だから両辺を $2(2\cos\alpha+1)$ で割って

$-(\cos\alpha - 1)(f(t) - f(\alpha)) + \sin\alpha(g(t) - g(\alpha)) = 0$

$$\cancel{2}\sin^{\cancel{2}}\frac{\alpha}{2}\left(f(t)-f(\alpha)\right)+\cancel{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha}{2}\left(g(t)-g(\alpha)\right)=0$$

$$\left(f(t)-f(\alpha)\right)\sin\frac{\alpha}{2}+\left(g(t)-g(\alpha)\right)\cos\frac{\alpha}{2}=0$$

$$4\left(\sin\frac{t-\alpha}{2}\right)^2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)=0 \qquad (\because (2))$$

これを満たすtは

$$\frac{t-\alpha}{2}=\pi\times n \ , \quad t+\frac{\alpha}{2}=\pi\times n \qquad (n\text{は整数})$$

で.

$$t=2n\pi+\alpha \ , \ n\pi-\frac{\alpha}{2}$$

$\frac{2}{3}\pi<t<\frac{4}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi<t<2\pi$ を満たすものは $\pi-\frac{\alpha}{2}$, $2\pi-\frac{\alpha}{2}$

P_1 の x 座標は $f(\pi-\frac{\alpha}{2})$ P_2 の x 座標は $f(2\pi-\frac{\alpha}{2})$

図より P_2 の x 座標の方が大きく. P_1P_2 の長さは

$$\left\{f(2\pi-\frac{\alpha}{2})-f(\pi-\frac{\alpha}{2})\right\}\times\sqrt{1+\tan^2\theta}$$

$$=\left(2\cos(-\frac{\alpha}{2})+\cancel{\cos(-\alpha)}+2\cos(\frac{\alpha}{2})-\cancel{\cos(-\alpha)}\right)\left|\frac{1}{\cos\theta}\right|$$

$$=4\cos\frac{\alpha}{2}\times\frac{1}{\cos(-\frac{\alpha}{2})}=4$$

よって P_1P_2 は α の値によらず一定である