大阪大学2022

1　zは中心 $\frac{3}{2}$，半径rの円周上にある　$\left|z-\frac{3}{2}\right|=r$ …①

$z+w=zw$ より　$(w-1)z=w$

ここで $w=1$は上式を満たさないので　$z=\frac{w}{w-1}$ …②

①に②を代入

$$\left|\frac{w}{w-1}-\frac{3}{2}\right|=r$$

$$\left|\frac{3-w}{2(w-1)}\right|=r$$

$$|w-3|=2r|w-1| \quad \cdots ③$$

(i) ③は $2r=1$のとき，wが点1と点3からの距離が等しい点の集合を表しており，それは，点1と点3の垂直二等分線を表している

(ii) $2r\neq 1$のとき，

③の両辺を2乗して

$$w\bar{w}-3w-3\bar{w}+9=4r^2(w\bar{w}-w-\bar{w}+1)$$

$$(4r^2-1)w\bar{w}+(3-4r^2)w+(3-4r^2)\bar{w}+4r^2-9=0$$

$$w\bar{w}-\frac{4r^2-3}{4r^2-1}w-\frac{4r^2-3}{4r^2-1}\bar{w}+\frac{4r^2-9}{4r^2-1}=0$$

$$\left(w-\frac{4r^2-3}{4r^2-1}\right)\left(\bar{w}-\frac{4r^2-3}{4r^2-1}\right)=\frac{9-4r^2}{4r^2-1}+\frac{(4r^2-3)^2}{(4r^2-1)^2}$$

$$\left|w-\frac{4r^2-3}{4r^2-1}\right|^2=\frac{16r^2}{(4r^2-1)^2}$$

$$\left|w-1-\frac{2}{4r^2-1}\right|=\left|\frac{4r}{4r^2-1}\right|$$　中心 $1+\frac{2}{4r^2-1}$　半径 $\frac{4r}{|4r^2-1|}$ の円

$r=\frac{1}{2}$のとき，　実部が2の直線　$\frac{w+\bar{w}}{2}=2$

$r\neq\frac{1}{2}$のとき，　中心 $1+\frac{2}{4r^2-1}$　半径 $\frac{4r}{|4r^2-1|}$ の円　$\left|w-1-\frac{2}{4r^2-1}\right|=\left|\frac{4r}{4r^2-1}\right|$

2

(1) $\cos 4\alpha = \cos\frac{8}{7}\pi = \cos\left(2\pi - \frac{6}{7}\pi\right) = \cos\left(-\frac{6}{7}\pi\right) = \cos\frac{6}{7}\pi = \cos 3\alpha$

よって $\cos 4\alpha = \cos 3\alpha$ が成り立っている.

(2) (1)より

$$2\cos^2 2\alpha - 1 = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha$$

$$2(2\cos^2\alpha - 1)^2 - 1 = (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha$$

$\cos\alpha = c$ と表す

$$2(2c^2-1)^2 - 1 = (2c^2-1)c - 2(1-c^2)c$$

$$8c^4 - 4c^3 - 8c^2 + 3c + 1 = 0$$

$$(c-1)(8c^3 + 4c^2 - 4c - 1) = 0$$

$\cos\alpha \neq 1$ だから $8c^3 + 4c^2 - 4c - 1 = 0$

よって $f(\cos\alpha) = 0$ が成り立つことが示された.

(3) $\cos\alpha$ が有理数だと仮定する.

このとき $\cos\alpha$ は $\cos\alpha = \frac{n}{m}$ (m, n は互いに素な自然数で $0 < \cos\alpha < 1$ だから. $m \geqq 2$)

これを(2)の結果に代入

$$8\left(\frac{n}{m}\right)^3 + 4\left(\frac{n}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{n}{m}\right) - 1 = 0$$

$$n(8n^2 + 4nm - 4m^2) = m^3 \quad \cdots ①$$

ここで n と m は互いに素だから ① が成り立つのは $n=1$ のときに限られ.

$n=1$ とすると

$$8 + 4m - 4m^2 = m^3$$

$$m(m^2 + 4m - 4) = 8 \quad \cdots ②$$

m は $m \geqq 2$ を満たす自然数だから. ② が成り立つのは.

m が 8 の約数である. $2, 4, 8$ のいずれかのとき.

$m=2$ のとき. $2 \times (2^2 + 4 \times 2 - 4) = 16 \neq 8$

$m=4$ のとき $4 \times (4^2 + 4 \times 4 - 4) = 112 \neq 8$

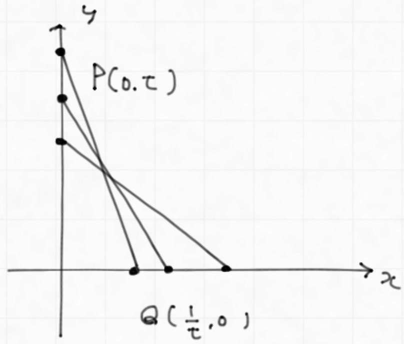
$m=8$ のとき $8 \times (8^2 + 4 \times 8 - 4) = 8 \times 92 = 736 \neq 8$

よって 仮定は矛盾し. $\cos\alpha$ は 有理数ではない.

3

P, Q を通る直線は

$$y = -t^2x + t$$



線分PQの通過する領域内の点を(X, Y)とすると、

(X, Y)が領域内の点であるための条件は、

$Y = -t^2X + t$ …①

$X \geqq 0,\ Y \geqq 0$ …②

$1 \leqq t \leqq 2$ …③ を満たす t が存在することである …(＊)

①より $t^2X - t + Y = 0$ …④

左辺を $f(t)$ と表す。④が③の範囲で解を持つのは $f(t)$ のグラフが③の範囲で t 軸と交わるときだから、

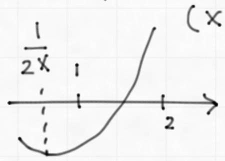
(i) $X = 0$ のとき $Y = t$ だから $1 \leqq Y \leqq 2$ のとき、(＊)は成り立つ

(ii) $X \neq 0$ のとき

$$f(t) = X\left(t - \frac{1}{2X}\right)^2 - \frac{1}{4X} + Y$$

(ii-1) $\frac{1}{2X} \leqq 1$ のとき、$f(1) < 0$ かつ $f(2) > 0$ または $f(1) \times f(2) = 0$ のとき、条件は成立する

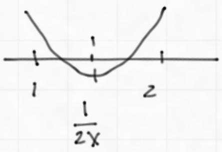
$\left(X \geqq \frac{1}{2}\right)$



$f(1) = X - 1 + Y < 0$ かつ $f(2) = 4X - 2 + Y > 0$ …⑤

$f(1) \times f(2) = (X + Y - 1)(4X + Y - 2) = 0$ …⑥

(ii-2) $1 < \frac{1}{2X} < 2$ のとき、$\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\right)$

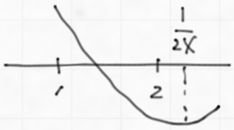


$f\left(\frac{1}{2X}\right) = -\frac{1}{4X} + Y \leqq 0$ かつ

$f(1), f(2)$ の少くとも一方は 0 以上

$\Leftrightarrow X + Y - 1 \geqq 0$ または $4X + Y - 2 \geqq 0$ …⑦

(ii-3) $\frac{1}{2X} \geqq 2$ のとき $\left(X \leqq \frac{1}{4}\right)$

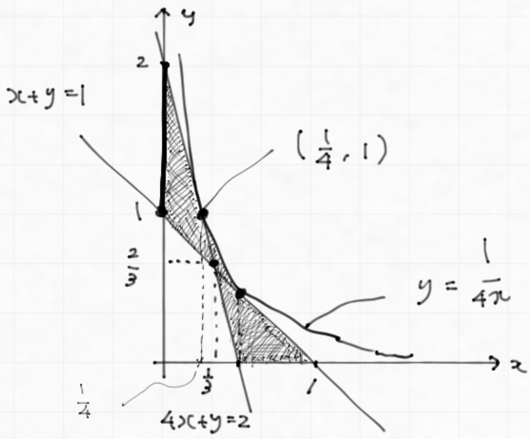


$f(1) > 0$ かつ $f(2) < 0$ または $f(1) \times f(2) = 0$

$\Leftrightarrow X - 1 + Y > 0$ かつ $4X + Y - 2 < 0$

、$(X + Y - 1)(4X + Y - 2) = 0$

(i)(ii)より、(＊)を満たす(X, Y)は右図のようになる



4

(1) $g(x)=f(x)-x$ とおく.

$g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-1=-\dfrac{x}{x+1}$

$x>0$ のとき $g'(x)$ は常に負だから $g(x)$ は $x>0$ で単調に減少する

$g(0)=f(0)-0=1>0$.

$g(3)=f(3)-3=\log 4+1-3=2\log 2-2=2(\log 2-1)<0 \quad (\because e>2)$

であり、かつ、$g(x)$ が単調に減少することから $g(x)$ のグラフは $x>0$ で x 軸と唯1つの交点をもつ.

よって $g(x)=0 \iff f(x)=x$ は $x>0$ でただ1つの解をもつ.

(2) $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$ であり $x>0$ において $f'(x)$ は単調に減少する

$0<t<\alpha$ を満たす実数を t とする

$f(x)$ は $[t,\alpha]$ で連続かつ (t,α) で微分可能だから平均値の定理より

$\dfrac{f(\alpha)-f(t)}{\alpha-t}=f'(c) \quad \cdots ① \quad , \quad t<c<\alpha$

を満たす c が少なくとも1つ存在する.

ここで、$t<c<\alpha$、および、$f'(t)$ が単調減少することから

$f'(\alpha)<f'(c)<f'(t) \quad \cdots ②$

$f'(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}>0$, $f(\alpha)=\alpha$, および ①, ② より

$0<f'(\alpha)<\dfrac{\alpha-f(t)}{\alpha-t}<f'(t)$

$\therefore \quad 0<\dfrac{\alpha-f(t)}{\alpha-t}<f'(t)$

$t\to x$ と書きかえて、$0<\dfrac{\alpha-f(x)}{\alpha-x}<f'(x)$ が成り立つことが示された.

(3) $x>1$ のとき

$f'(x)<f'(1)=\dfrac{1}{2}$

また $x_1=1$, $x_{n+1}=f(x_n)=\log(x_n+1)+1$ より帰納的に $x_n\geqq 1$

(2) より $\dfrac{\alpha-f(x_n)}{\alpha-x_n}<f'(x_n)<f'(1)=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\alpha-x_{n+1}}{\alpha-x_n}<\dfrac{1}{2}$

$\therefore \quad \alpha-x_{n+1}<\dfrac{1}{2}(\alpha-x_n)$

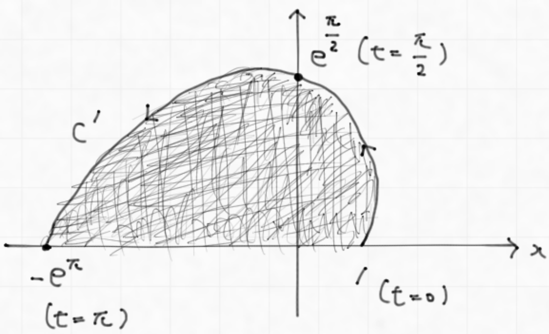
(4) $0<|\alpha-x_n|<\dfrac{1}{2}|\alpha-x_{n-1}|<\left(\dfrac{1}{2}\right)^2|\alpha-x_{n-2}|<\cdots<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}|\alpha-x_1|\to 0$

だから、はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|\alpha-x_n|=0$. よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$

5

x 方向に $-e^{\pi}$ だけ平行移動した曲線 C' と x 軸で囲まれる図形の面積を考える

$$C' : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad 0 \leqq t \leqq \pi$$



もとめる面積は左図の斜線部

これを S として

$$S = \int_0^{\pi} \pi (e^{t})^2 \times \frac{1}{2\pi} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2t} dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{4}e^{2\pi} - \frac{1}{4} = \frac{e^{2\pi}-1}{4}$$