京都産業大学2022公募

1

(1) $(x+y+1)(x-2y+1)-10y^2$

$= x^2+(-y+2)x-12y^2-y+1 = x^2+(2-y)x+(3y+1)(-4y+1)$

$= (x+3y+1)(x-4y+1)$

(2) $2^x = X$ とおく $-1 \leqq x \leqq 2$ のとき $\left(\frac{1}{2} \leqq X \leqq 4\right)$

$y = X^2-6X+8 = (X-3)^2-1$

$X=3$ のとき ($x=\log_2 3$ のとき) 最小 $y=-1$

$X=\frac{1}{2}$ のとき. ($x=-1$ のとき) 最大 $\frac{21}{4}$

(3) $y = 2\sin^2 x + 6\sin x\cos x + 10\cos^2 x$

$= 1-\cos 2x + 3\sin 2x + 5(1+\cos 2x)$

$= 3\sin 2x + 4\cos 2x + 6$

$= 5\sin(2x+\alpha)+6$ (ただし $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. $\cos\alpha = \frac{3}{5}$)

$-1 \leqq \sin(2x+6) \leqq 1$ だから

最大値は 11 最小値は 1

(4) $a_{n+1} = -\frac{1}{5}a_n + \frac{3}{2}$

$a_{n+1}-\frac{5}{4} = -\frac{1}{5}\left(a_n-\frac{5}{4}\right)$

$a_n-\frac{5}{4} = \left(a_1-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{7}{4}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ $\therefore$ $a_n = \frac{7}{4}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}+\frac{5}{4}$

2 $y=-x^2-4x-2=f(x)$ と表す

A は $y=f(x)+a=-x^2-4x+a-2$

B は $y=f(x-2a)=-(x-2a)^2-4(x-2a)-2=-x^2+4ax-4a^2-4x+8a-2$

$y=-x^2+4(a-1)x-4a^2+8a-2$

C は

$y=-x^2+4(a-1)x-4a^2+9a-2$

C と $y=x^2$ を連立して $2x^2-4(a-1)x+4a^2-9a+2=0$ …①

この2次方程式が異なる2解を持てば良い

判別式を D として

$$D/4=(-2a+2)^2-2\cdot(4a^2-9a+2)$$
$$=-4a^2+10a=2a(5-2a)>0 \qquad 0<a<\frac{5}{2}$$

① より 2解は $x=\dfrac{2(a-1)\pm\sqrt{-4a^2+10a}}{2}$

2解の差は $\sqrt{-4a^2+10a}$ よって面積は $S=\dfrac{2}{6}\left(\sqrt{-4a^2+10a}\right)^3=\dfrac{1}{3}(-4a^2+10a)^{\frac{3}{2}}$

$S^2=\dfrac{1}{9}(-4a^2+10a)=-\dfrac{4}{9}\left(a^2-\dfrac{5}{2}a\right)=-\dfrac{4}{9}\left(a-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{25}{36}$ $\therefore\ a=\dfrac{5}{4}$ で最大

3

$\vec{OP} = \frac{3}{4}\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OC} = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ $\quad \vec{OQ} = \frac{2}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OC} = \left(0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{1}{6}\right)$

$\vec{PR}\cdot\vec{QR} = (\vec{OR} - \vec{OP})\cdot(\vec{OR} - \vec{OQ}) = |\vec{OR}|^2 - \vec{OP}\cdot\vec{OR} - \vec{OR}\cdot\vec{OQ} + \vec{OP}\cdot\vec{OQ}$

$= k^2 - \frac{1}{2}k - \frac{2}{3}k + \frac{1}{3} = k^2 - \frac{7}{6}k + \frac{1}{3} = 0$

$6k^2 - 7k + 2 = 0 \Leftrightarrow (3k-2)(2k-1) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$

$\vec{PR}\cdot\vec{QR} = \left(k - \frac{7}{12}\right)^2 - \frac{49}{144} + \frac{1}{3}$ $\quad k = \frac{7}{12}$ のとき最小

$k = 1$ のとき.

$R(0, 0, 1),\ P\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right),\ Q\left(0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$\vec{OH}\cdot\vec{PR} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}u + \frac{1}{2}w = 0 \qquad w = 3u$

$\vec{OH}\cdot\vec{QR} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{4}{3}v + \frac{1}{3}w = 0 \qquad w = 4v \qquad 3u = 4v = w$

$\vec{OH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}s \\ \frac{4}{3}t \\ 1 - \frac{1}{2}s - \frac{1}{3}t \end{pmatrix}$

これを先の結果に代入

$u = \frac{1}{3}w$ だから $\frac{3}{2}s = \frac{1}{3}w \qquad s = \frac{2}{9}w$

$v = \frac{1}{4}w$ 〃 $\frac{4}{3}t = \frac{1}{4}w \qquad t = \frac{3}{16}w$

$1 - \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{9}w - \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{16}w = w$

$1 = w + \frac{1}{9}w + \frac{1}{16}w = \frac{169}{144}w \qquad w = \frac{144}{169}$