関西大2018

1

$$f(x) = \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} \quad (x>0)$$

(1) $f'(x) = -3 \times \frac{1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3} \times e^{-\frac{1}{x}} \times (+x^{-2})$

$$= -\frac{3e^{-\frac{1}{x}}}{x^4} + \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^5} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}\left(\frac{1}{x} - 3\right)$$

(2) $f'(x) = 0$を解くと　$x = \frac{1}{3}$

$f(x)$の増減は右のようになる

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f(x)$	/	$+$	0	$-$
$f(x)$	/	↗		↘

よって$f(x)$は　$x = \frac{1}{3}$で極大値 $f(\frac{1}{3}) = 27e^{-3}$ をとる

(3) $S = \int_1^2 |f(x)|\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}\,dx$

$-\frac{1}{x} = t$とおくと　$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2}$

x	$1 \to 2$
t	$-1 \to -\frac{1}{2}$

だから

$$S = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x^3} e^t \times x^2\,dt = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} -te^t\,dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} te^t\,dt$$

$$= \left[te^t\right]_{-\frac{1}{2}}^{-1} - \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} 1 \cdot e^t\,dt = -e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1} + e^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}} - 2e^{-1}$$

2

$s=1-t^2$ とおくと $\dfrac{ds}{dt}=-2t$,

t	$0\to1$
s	$1\to0$

$$\int_0^1 t f(1-t^2)\,dt=\int_1^0 t f(s)\left(-\frac{1}{2t}\right)ds=\frac{1}{2}\int_0^1 f(s)\,ds=\frac{1}{2}k \quad ①$$

$$f'(x)=xe^{-x}-6x\int_0^1 f(t)\,dt-12x\int_0^1 tf(1-t^2)\,dt$$

$$=xe^{-x}-6xk-6xk=xe^{-x}-12kx \quad ②$$

両辺をxで積分 $f(x)=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx-6kx^2$

$$=-xe^{-x}-e^{-x}-6kx^2 \quad ③ +C$$

$f'(x)=x(e^{-x}-12k)$ について

$12k>1$ のとき. $e^{-x}-12k=0$ となるのは $e^{-x}=12k$ $x=-\log 12k<0$

x	$\cdots$	$-\log 12k$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

極値は2つ. $x=0$ で極大

$12k=1$ のとき. $e^{-x}-1=0$ となるのは $x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘		↘

極値はない 極大値は存在しない

$0<12k<1$ のとき $e^{-x}=12k$ $x=-\log 12k>0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\log 12k$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

極値は2つ $x=-\log 12k$ で極大

$k\leqq 0$ のとき $e^{-x}=12k$ を満たすxは存在しない

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

極値は1つ 極大値は存在しない

④ $k\leqq 0$ ⑤ $k>\dfrac{1}{12}$ ⑥ $x=-\log 12k$ で極小値をとる

3

(1) $z + \frac{4}{z} = z + \frac{4\bar{z}}{z\bar{z}} = z + \frac{4\bar{z}}{|z|^2} = x + yi + \frac{4(x - yi)}{x^2 + y^2}$

実部は $x + \frac{4x}{x^2+y^2}$ ，虚部は $y - \frac{4y}{x^2+y^2}$

(2) $f(x) = x + \frac{4}{x}$ とする　$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$

増減は

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$-$	/	$-$		$+$
$f(x)$	↗		↘	/	↘		↗

$f(-2) = -2 - 2 = -4$．$f(2) = 4$

よって　**$x + \frac{4}{x} \leqq -4$ ，$x + \frac{4}{x} \geqq 4$**

(3) $z + \frac{4}{z}$ が実数なのは (1)より $y\left(1 - \frac{4}{x^2+y^2}\right)$ が 0となるときで．$y = 0$ または $x^2+y^2=4$

$y=0$のとき　$z + \frac{4}{z} = x + \frac{4}{x}$ となり．(2)と　$2 \leqq z + \frac{4}{z} \leqq 5$ を同時に満たすのは．

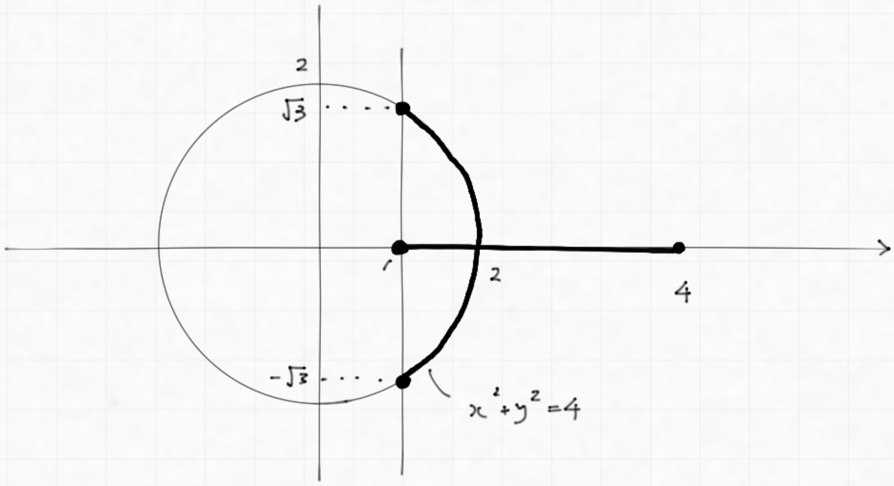
$4 \leqq x + \frac{4}{x} \leqq 5$ のときで．　$x + \frac{4}{x} = 5$ を解くと　$x^2 - 5x + 4 = 0$ より $x = 1, 4$

したがって　$1 \leqq x \leqq 4$

$x^2+y^2=4$のとき．　$z + \frac{1}{z} = 2x$

このとき．$2 \leqq z + \frac{4}{z} \leqq 5$ より　$2 \leqq 2x \leqq 5$　　$1 \leqq x \leqq \frac{5}{2}$

以上より

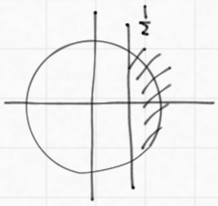


4 (1) $\cos x < 0$ のときは成立しないので $\cos x \geqq 0 \Leftrightarrow 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi \leqq x < 2\pi$ …①

このとき不等式の両辺を2乗して $\sin^2 x + \frac{1}{2} < \cos^2 x \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x > \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 2x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < 2x < \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi < 2x < \frac{7}{3}\pi,\ \frac{11}{3}\pi < 2x < 2\pi$ …②

① かつ ② を満たすのは、



$$0 \leqq x < \frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$$

(2) $\cos x \cos(\pi - x) = -\cos^2 x$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ だから与式は $\cos x(2\sin x + \cos x) = 0$

と変形でき、$\cos x = 0$ となるのは、$x = \pm\frac{\pi}{2}$ $\sin x = \sin(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1$

$2\sin x + \cos x = 0$ となるとき。$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ に $\cos x = -2\sin x$ を代入して、

$5\sin^2 x = 1$ $\therefore \sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$ $\cos x$ と $\sin x$ の符号が異なる($\because \cos x = -2\sin x$)

のは、第2、第4象限で、$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ より、x は第4象限の角。したがって $\sin x = -\sqrt{\frac{1}{5}}$

以上より $\sin x = \pm 1,\ -\sqrt{\frac{1}{5}}$

(4) $a_1 - a_2$ の値が2以上となるのは右表のとおり

a_1 \ a_2	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3	2					
4	3	2				
5	4	3	2			
6	5	4	3	2		
a_3	×	1以下	2以下	3以下		

$a_2 - a_3 \geqq 1 \Leftrightarrow a_3 \leqq a_2 - 1$ を満たすのは、

$a_2 = 1$ のとき… 存在しない

$a_2 = 2$ 〃 … $a_3 = 1$

$a_2 = 3$ 〃 … $a_3 = 1, 2$

$a_2 = 4$ 〃 … $a_3 = 1, 2, 3$

以上より、(a_1, a_2, a_3) で条件を満たすのは

$3 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 3$ 10通り。 よってもとめる確率は $\frac{10}{6^3} = \frac{5}{108}$

(5) $\frac{1}{m} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow 10n - 5m = mn \Leftrightarrow (m-10)(n+5) = -50$ …①

$m - 10 \geqq -9$, $n + 5 \geqq 6$ だから ① を満たす m, n は

$(m-10, n+5) = (-5, 10), (-2, 25), (-1, 50)$

$(m, n) = (5, 5), (8, 20), (9, 45)$