信州大学2021

3　$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{3}$

(1)　$12 = 2^2 \cdot 3^1$ だから $r_n = 6$ となるのは A_n が 2 の倍数だが 2^2 の倍数でなく、かつ 3 の倍数となっているとき

したがって $a_1, a_2, \cdots a_n$ のうちの1つだけが 2 で残りは全て 3 となっているときである。

2の回数は 1 回 つまり、$p = 1$ となったとき、A_n を 12 で割った余りは 6 となる

$\therefore p = 1$

(2)　$P(r_n = 6) = {}_nC_{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{n \cdot 2^{n-1}}{3^n}$

(3)　$A_n = 2^p \cdot 3^{n-p}$ となるが、これが 12 の倍数とならないのは、

$p = 0$ のとき、$(A_n = 3^n)$　$\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$p = 1$ 〃 $(A_n = 2 \cdot 3^{n-1})$　$\frac{n \cdot 2^{n-1}}{3^n}$　((2)より)

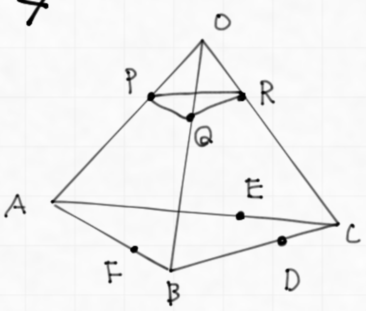
$p = n$ 〃 $(A_n = 2^n)$　$\left(\frac{1}{3}\right)^n$

これらが余事象となるので

$$P(r_n = 0) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{n \cdot 2^{n-1}}{3^n} - \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3^n - (n+2) \cdot 2^{n-1} - 1}{3^n}$$

信州大学2021

4



(1) $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{a}$, $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{3}\vec{c}$

$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$, $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}$, $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PE} = \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{2}{3}\vec{c} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{a} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PD}$$

これは PQDE が平行四辺形であることを示しており. したがって.
PQDEは同一平面上にある.

(2) Sは平面 PQD上にあるので.

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \alpha\overrightarrow{PQ} + \beta\overrightarrow{PE} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\alpha(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{2}{3}\beta\vec{c} \quad \cdots ①$$

Sは FR上にあるので. $FS : SR = 1-s : s$ として.

$$\overrightarrow{OS} = (1-s)\overrightarrow{OR} + s\,\overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}(1-s)\vec{c} + \frac{1}{3}s\vec{a} + \frac{2}{3}s\vec{b} \quad \cdots ②$$

①. ② が同時に成り立つのは. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が互いに1次独立であることから

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\alpha = \frac{1}{3}s \quad かつ \quad \frac{1}{3}\alpha = \frac{2}{3}s, \quad \frac{2}{3}\beta = \frac{1}{3}(1-s)$$

となるときで　$s = \frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$

よって　$\overrightarrow{OS} = \boldsymbol{\frac{1}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}}$

信州大学2021

5

(1) $\int_0^1 x^4(1-x)^4 dx = \left[\frac{1}{5}x^5(1-x)^4\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{5}x^5 \times 4(1-x)^3 \times (-1)\,dx$

$= \frac{4}{5}\int_0^1 x^5(1-x)^3 dx = \frac{4}{5}\left\{\left[\frac{1}{6}x^6(1-x)^3\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{6}x^6 \times 3(1-x)^2(-1)\,dx\right\}$

$= \frac{4}{5}\times\frac{3}{6}\int_0^1 x^6(1-x)^2 dx = \frac{4}{5}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{7}\int_0^1 x^7(1-x)^1 dx = \frac{4}{5}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{8}\int_0^1 x^8 dx$

$= \cancel{\frac{4}{5}}\times\cancel{\frac{3}{6}}_2\times\cancel{\frac{2}{7}}\times\cancel{\frac{1}{8}}\times\frac{1}{9} = \boldsymbol{\frac{1}{630}}$

(2) $x^4(1-x)^4 = x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4$

$\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2}$

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ について $x=\tan\theta$ と置いて $\left(\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}\right.$, $\begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \hline \theta & 0 \to \frac{\pi}{4} \end{array}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$

となるので

$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx = \int_0^1 x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2}dx$

$= \frac{1}{7} - \frac{4}{6} + 1 - \frac{4}{3} + 4 - 4\cdot\frac{\pi}{4} = \boldsymbol{\frac{22}{7} - \pi}$

(3) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき $1 \leqq 1+x^2 \leqq 2$ だから $\frac{x^4(1-x)^4}{2} \leqq \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \leqq \frac{x^4(1-x)^4}{1}$

この不等式を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で積分

$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{2}dx \leqq \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx \leqq \int_0^1 x^4(1-x)^4 dx$

$\frac{1}{2}\int_0^1 x^4(1-x)^4 dx \leqq \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx \leqq \int_0^1 x^4(1-x)^4 dx$

ここに (1) (2) の結果を代入

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{630} \leqq \frac{22}{7} - \pi \leqq \frac{1}{630}$

$\therefore$ $\boldsymbol{\frac{1}{1260} \leqq \frac{22}{7} - \pi \leqq \frac{1}{630}}$ が示された.

信州大学2021

6. $f(x) = a\sin x + b\cos x + c\sin 2x$

$f'(x) = a\cos x - b\sin x + 2c\cos 2x$

$f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}a - \frac{1}{\sqrt{2}}b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b \quad \cdots ①$

$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}a + \frac{1}{\sqrt{2}}b + c = 6\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 　ここに ① を代入

$\sqrt{2}a + c = 6\sqrt{2} + \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad c = 6\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}a \quad \cdots ②$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\sin x + a\cos x + c\sin 2x \, dx$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos x \, dx = 2a\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a = 12 \cdots ③$

③ より $a = 6$．これを ① ② に代入して $b = 6$，$c = \sqrt{3}$ 　　**$a = 6$, $b = 6$, $c = \sqrt{3}$**

（$x = \frac{\pi}{4}$ で極大となることは下の増減表で確認できる）

$f'(x) = 6\cos x - 6\sin x + 2\sqrt{3}\cos 2x$

$= 6\cos x - 6\sin x + 2\sqrt{3}(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= 2(\cos x - \sin x)(3 + \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}\sin x)$

$f'(x) = 0$ となるのは $\cos x = \sin x$，$\cos x + \sin x = -\sqrt{3}$

$\cos x = \sin x$ となるのは $x = \frac{\pi}{4}, -\frac{3}{4}\pi$

$\cos x + \sin x = -\sqrt{3}$ について．　$\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

となるが $\sin(x + \frac{\pi}{4}) \geqq -1$ だからこれを満たす x は存在しない

以上のことから $f(x)$ の増減は下のようになる

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{1}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	極小	↗	極大	↘	

$f(-\frac{3}{4}\pi) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \times 6 - \frac{1}{\sqrt{2}} \times 6 + \sqrt{3} = \sqrt{3} - 6\sqrt{2}$

$f(\pi) = -6 > \sqrt{3} - 6\sqrt{2} = f(-\frac{3}{4}\pi)$

$-\pi \leqq x \leqq \pi$ における $f(x)$ の最小値は **$\sqrt{3} - 6\sqrt{2}$** （$x = -\frac{3}{4}\pi$ のとき）

信州大学2021

7 $f(a+b)=f(a)+f(b)+4ab \quad \cdots ①$

(1) ①で $a=b=0$ とする

$$f(0)=f(0)+f(0)+4\times 0^2 \iff f(0)=\mathbf{0}$$

(2)

$$f'(0)=2=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} \quad \cdots ②$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{f(x)}+f(h)+4xh-\cancel{f(x)}}{h} \quad (\because ①)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)}{h}+4x\right)=4x+2 \quad (\because ②)$$

よって $f(x)$ は $(-\infty,\infty)$ で微分可能であり $f'(x)=4x+2 \quad \cdots ③$

③を積分して $f(x)=2x^2+2x+C$ (Cは積分定数)

ここで $x=0$ とすると $f(0)=C=0$ (∵ (1))

以上より $f(x)=\mathbf{2x^2+2x}$

(3) $g(x)=\int_1^x \frac{1}{f(t)}dt=\int_1^x \frac{1}{2t^2+2t}dt=\frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}dt$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log|t|-\log|t+1|\Big]_1^x=\frac{1}{2}\left(\log|x|-\log|x+1|\right)-\frac{1}{2}(0-\log 2)$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{2x}{(x+1)}\right|$$

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\log\left|\frac{2}{(1+\frac{1}{x})}\right|=\mathbf{\frac{1}{2}\log 2}$$