大阪医科大学2021前期

1 (1) $0 \leqq x \leqq a$ より　$a-x$ は 0以上と分かる。ので 平方の差を考える.

$$(\sqrt{a})^2-(\sqrt{a-x})^2 = a-a+x = x \geqq 0$$

$$(\sqrt{a-x})^2-\left(\frac{a-x}{\sqrt{a}}\right)^2 = (a-x)-\frac{(a-x)^2}{a} = (a-x)\left(1-\frac{a-x}{a}\right) = (a-x)\cdot\frac{x}{a} \geqq 0$$

よって $\dfrac{a-x}{\sqrt{a}} \leqq \sqrt{a-x} \leqq \sqrt{a}$ が成り立っている.

(2) (1)の不等式に e^{-x} をかける.

$$\frac{(a-x)}{\sqrt{a}}e^{-x} \leqq e^{-x}\sqrt{a-x} \leqq \sqrt{a}\,e^{-x}$$

$0 \leqq x \leqq a$ の区間で積分する

$$\int_0^a \frac{(a-x)}{\sqrt{a}}e^{-x} \leqq \int_0^a e^{-x}\sqrt{a-x}\,dx \leqq \int_0^a \sqrt{a}\,e^{-x}\,dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\left[-(a-x)e^{-x}\right]_0^a - \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^a e^{-x}dx \leqq I \leqq \sqrt{a}\left[-e^{-x}\right]_0^a$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\times a\times e^0 - \frac{1}{\sqrt{a}}\left[-e^{-x}\right]_0^a \leqq I \leqq -\sqrt{a}\,e^{-a}+\sqrt{a}$$

$$\sqrt{a}-\frac{1-e^{-a}}{\sqrt{a}} \leqq I \leqq \sqrt{a}-\sqrt{a}\,e^{-a}$$

よって不等式が成り立つ.　　　　証明終.

大阪医科大学2021前期

2 (1) 札は全て区別し、$R_1 R_2 R_3$ $B_1 B_2 B_3$ とする。

Aさんが3枚をとるとき、そのとり出し方は　$_6C_3 = 20$通り

赤札を 0, 1, 2, 3 枚とり出す確率を p_0, p_1, p_2, p_3 とすると

$$p_0 = \frac{_3C_3}{20} = \frac{1}{20} \qquad p_1 = \frac{_3C_1 \times {_3C_2}}{20} = \frac{9}{20}, \quad p_2 = \frac{_3C_2 \cdot {_3C_1}}{20} = \frac{9}{20} \qquad p_3 = \frac{_3C_3}{20} = \frac{1}{20}$$

(2) Aさんが最初にとり出す赤札の枚数で場合分けして考える

$$p_0 \times \frac{0}{3} + p_1 \times \frac{1}{3} + p_2 \times \frac{2}{3} + p_3 \times \frac{3}{3} = 0 + \frac{3}{20} + \frac{6}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{2}$$

(3) (2)と同様に場合分け

$$p_0 \times \left(\frac{0}{3}\right)^2 + p_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + p_2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + p_3 \left(\frac{3}{3}\right)^2 = 0 + \frac{1}{20} + \frac{4}{20} + \frac{1}{20} = \frac{3}{10}$$

(4) n回全て赤札の確率を P とすると

$$P = p_0 \times \left(\frac{0}{3}\right)^n + p_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + p_2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + p_3 \left(\frac{3}{3}\right)^n = 0 + \frac{9}{20 \cdot 3^n} + \frac{9 \cdot 2^n}{20 \cdot 3^n} + \frac{3^n}{20 \cdot 3^n} = \frac{9 + 9 \cdot 2^n + 3^n}{20 \cdot 3^n}$$

Aが3枚の赤札をとり出し、かつ、Bがn回連続で赤札をとるのは　$p_3 \times \left(\frac{3}{3}\right)^n = p_3 = \frac{1}{20}$

よって、もとめる確率は

$$\frac{\frac{1}{20}}{P} = \frac{3^n}{9 + 9 \cdot 2^n + 3^n} = \frac{3^{n-2}}{1 + 2^n + 3^{n-2}}$$

大阪医科大学 2021 前期

3 (1) $z_{n+1}-\beta=\alpha(z_n-\beta) \iff z_{n+1}=\alpha z_n-\alpha\beta+\beta$

漸化式と比較して. $1=\beta-\alpha\beta \qquad \beta=\dfrac{1}{1-\alpha}$

(2) (1) より. $z_n-\beta=\alpha(z_{n-1}-\beta)=\alpha^2(z_{n-2}-\beta)=\cdots=\alpha^{n-1}(z_1-\beta)$

$$z_n=\alpha^{n-1}(1-\beta)+\beta=\alpha^{n-1}\left(1-\frac{1}{1-\alpha}\right)+\frac{1}{1-\alpha}=\frac{\alpha^n}{\alpha-1}+\frac{1}{1-\alpha}=\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}$$

$z_n=z_m$ のとき $\dfrac{\alpha^n-1}{\alpha-1}=\dfrac{\alpha^m-1}{\alpha-1} \iff \alpha^n=\alpha^m$

$m>n$ のとき $\alpha^{|m-n|}=\alpha^{m-n}=\dfrac{\alpha^m}{\alpha^n}=1$

$m<n$ のとき. $\alpha^{|m-n|}=\alpha^{n-m}=\dfrac{\alpha^n}{\alpha^m}=1$ よって $\alpha^{|m-n|}=1$. が成り立つ.

(3) α がある無理数 r により $\alpha=\cos 2\pi r+i\sin 2\pi r$ と表されたとき、相異なる正の整数 m, n で $z_m=z_n$ を満たすものが存在すると仮定する.

このとき (2) より $\alpha^{|m-n|}=1$ が成り立つので

$$(\cos 2\pi r+i\sin 2\pi r)^{|m-n|}=1$$

$$\cos 2\pi r|m-n|+i\sin 2\pi r|m-n|=\cos 0+i\sin 0$$

よって $2\pi r|m-n|=2\pi\times k$ (k は 0以外の整数) が成り立つ. が. これより.

$$r=\frac{k}{|m-n|}$$

となるが. これは r が無理数であることに矛盾している.

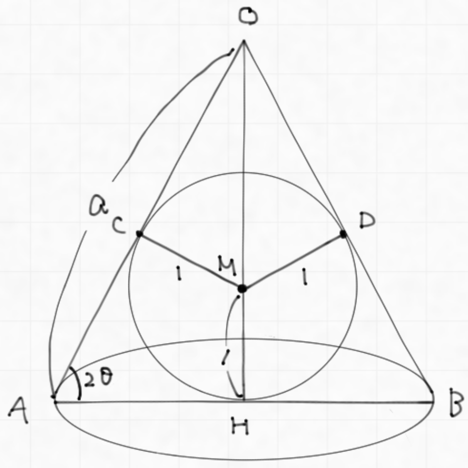
よって α がある無理数 r により $\alpha=\cos 2\pi r+i\sin 2\pi r$ と表されたとき、全ての相異なる正整数 m, n に対して $z_m \neq z_n$ である

証明終.

大阪医科大学2021前期

4

母線の長さをaとする．底面の直径の1つをA.B．円錐の頂点をO，Oから底面に下ろした垂線の足をH（Hは底面の円の中心）．球とOA，OBの接点をC，D．球の中心をMとする（右図）



$OH = a\sin 2\theta$，　$AH = a\cos 2\theta$

$\triangle OAH \sim \triangle OMC$ より

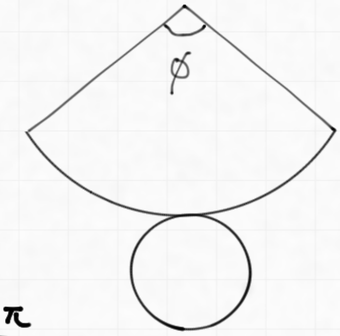
$OA : AH = OM : MC$

$a : a\cos 2\theta = a\sin 2\theta - 1 : 1$

$a^2\cos 2\theta \sin 2\theta - a\cos 2\theta = a$

$a\cos 2\theta \sin 2\theta - \cos 2\theta - 1 = 0$

$$a = \frac{1+\cos 2\theta}{\cos 2\theta \sin 2\theta} = \frac{\cancel{1}+\cancel{2}\cos^{\cancel{2}}\theta-\cancel{1}}{\cos 2\theta\cdot\cancel{2}\sin\theta\cancel{\cos\theta}} = \frac{1}{\tan\theta\cos 2\theta}$$



側面の展開図は扇形で，その中心角をϕとすると

扇の円弧の長さは底面の円周と等しいので．

$a\phi = 2\pi AH = 2\pi a\cos 2\theta$　　$\phi = 2\pi\cos 2\theta$

$$S = \pi a^2 \times \frac{\phi}{2\pi} = \frac{1}{2}a^2\phi = \frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{1}{\tan^2\theta\cos^{\cancel{2}}2\theta}\times\cancel{2}\pi\cancel{\cos 2\theta} = \frac{\pi}{\tan^2\theta\cos 2\theta}$$

(2)　$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1+\tan^2\theta = 1+\dfrac{1}{u}$ だから　$\cos 2\theta = 2\cdot\dfrac{u}{1+u} - 1 = \dfrac{u-1}{1+u}$

$$S = \frac{\pi}{\frac{1}{u}\times\frac{u-1}{1+u}} = \frac{u(1+u)\pi}{u-1}$$

$$\frac{dS}{du} = \frac{\pi(1+2u)(u-1)-\pi u(1+u)}{(u-1)^2} = \frac{\pi(u^2-2u-1)}{(u-1)^2}$$

$0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$．このとき　$0<\tan\theta<1$　　$\dfrac{1}{\tan\theta}>1$　より　　$u=\dfrac{1}{\tan^2\theta}>1$

また $\dfrac{dS}{du}=0$ となるのは　$u^2-2u-1=0$．$u>1$ より　$u=1+\sqrt{2}$ だから

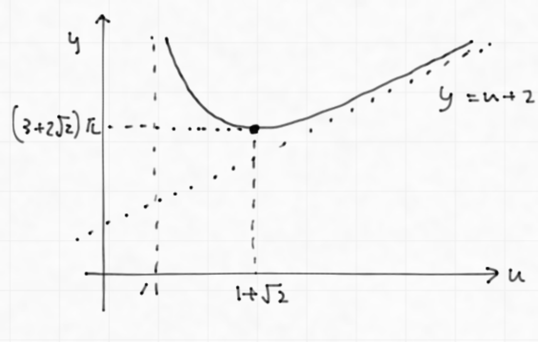
$u>1$ の範囲で S の増減をまとめると

u	1	…	$1+\sqrt{2}$	…
$\frac{dS}{du}$	／	−	0	+
S	／	↘		↗

$\displaystyle\lim_{u\to 1+0} S = \infty$

$\displaystyle\lim_{u\to\infty} S = \infty$

グラフは下のようになる



Sの最小値は

$u=1+\sqrt{2}$ のとき　$S = \dfrac{(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\pi = (3+2\sqrt{2})\pi$

$S = u+2+\dfrac{2}{u-1}$ より 漸近線は　$y=u+2$

大阪医科大学2021前期

5 (1) $x = bk$, $y = ak$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$

(2) 左辺 $= {}_nC_i \cdot {}_iC_j = \dfrac{n!}{\cancel{i!}(n-i)!} \times \dfrac{\cancel{i!}}{j!(i-j)!} = \dfrac{n!}{(n-i)!\,j!\,(i-j)!}$

右辺 $= {}_nC_j \cdot {}_{n-j}C_{i-j} = \dfrac{n!}{\cancel{(n-j)!}\,j!} \times \dfrac{\cancel{(n-j)!}}{(i-j)!(n-j-i+j)!} = \dfrac{n!}{(n-i)!\,j!(i-j)!}$

よって 左辺 = 右辺 であり、等式は成立することが示された。

(3) ${}_nC_j$ と ${}_nC_i$ が互いに素だとする。

このとき (2) より

$${}_nC_i \cdot {}_iC_j = {}_nC_j \cdot {}_{n-j}C_{i-j}$$

であり、かつ (1) より、

$${}_iC_j = k\,{}_nC_j \quad , \quad {}_{n-j}C_{i-j} = k\,{}_nC_i \qquad (k = 1, 2, 3, 4 \cdots)$$

${}_iC_j = k\,{}_nC_j$ より $\dfrac{i!}{\cancel{j!}(i-j)!} = k \cdot \dfrac{n!}{\cancel{j!}(n-j)!}$

$$k = \frac{i!\,(n-j)!}{n!\,(i-j)!} = \frac{i(i-1)(i-2)\cdots(i-j+2)(i-j+1)}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-j+2)(n-j+1)}$$

$$= \frac{i}{n} \times \frac{i-1}{n-1} \times \frac{i-2}{n-2} \times \cdots \times \frac{i-j+1}{n-j+1}$$

ここで上式の右辺の各項は全て1より小さく、その積が整数となることはないので矛盾している。

よって ${}_nC_j$ と ${}_nC_i$ が互いに素であることはない。

証明終