東京大2020

1

I (1) Δt秒後の位置は $\vec{r}' = (x + \overset{ア}{v_x}\Delta t,\ y + \overset{イ}{v_y}\Delta t)$

速度は $\vec{v}' = (v_x + \overset{ウ}{a_x}\Delta t,\ v_y + \overset{エ}{a_y}\Delta t)$

に変化するので $A_v' = \frac{1}{2}\left\{(x+v_x\Delta t)(v_y+a_y\Delta t) - (y+v_y\Delta t)(v_x+a_x\Delta t)\right\}$

$$\fallingdotseq \frac{1}{2}\left(xv_y + xa_y\Delta t + \cancel{v_xv_y\Delta t} - yv_x - ya_x\Delta t - \cancel{v_xv_y\Delta t}\right)$$

$$\Delta A_v = A_v' - A_v = \frac{1}{2}(xa_y\Delta t - ya_x\Delta t) = \frac{1}{2}(x\overset{オ}{a_y} - y\overset{カ}{a_x})\Delta t$$

(2) 面積速度が変化しないための条件は

$$xa_y - ya_x = 0$$

また運動方程式より $\vec{F} = m\vec{a}$ が成り立つので $F_x = ma_x$, $F_y = ma_y$

以上を連立して、F_x, F_y が $\boldsymbol{xF_y - yF_x = 0}$ を満たすとき、面積速度が変化しないことが分かる

(3) (2)より $(F_x, F_y) \parallel (x, y)$ だから、力は常に原点Oの向きに働くことが分かる。

円の接線は接点と円の中心を結ぶ線分に対して、常に垂直となっていることから、力が移動方向に対して常に垂直に働いている。したがって力は仕事を行わず、A→Bの移動でも、B→Cの移動でも力は仕事を行っておらず、A→B, B→C いずれも等しく0である

II (1) $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_r^2 = \frac{1}{2}m\left(v_x^2+v_y^2 - \frac{x^2v_x^2 + 2xyv_xv_y + y^2v_y^2}{r^2}\right)$

$$= \frac{m}{2r^2}\left((v_x^2+v_y^2)(x^2+y^2) - (x^2v_x^2+2xyv_xv_y+y^2v_y^2)\right) = \frac{m}{2r^2}\left(x^2v_y^2 + y^2v_x^2 - 2xyv_xv_y\right)$$

$$= \frac{m}{2r^2}(xv_y - yv_x)^2 = \boldsymbol{\frac{2m}{r^2}A_0^2}$$

(2) 力学的エネルギーEは

$$E = U + \frac{1}{2}mv^2 = -G\frac{mM}{r} + \frac{2m}{r^2}A_0^2 + \frac{1}{2}mv_r^2$$

まずrを変化させる。

$$E = 2mA_0^2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{GmM}{r}\times\frac{1}{2mA_0^2}\right) + \frac{1}{2}mv_r^2$$

$$= 2mA_0^2\left(\frac{1}{r} - \frac{GM}{4A_0^2}\right)^2 - 2mA_0^2\times\frac{G^2M^2}{4^2A_0^4} + \frac{1}{2}mv_r^2$$

$\frac{1}{r} = \frac{GM}{4A_0^2}$ のとき最小値 $\frac{1}{2}mv_r^2 - \frac{G^2mM^2}{8A_0^2}$

この値は $v_r = 0$ のとき最小となる。

以上より、半径 $\frac{4A_0^2}{GM}$ の円軌道を周回しているとき力学的エネルギーは最小となり、最小値は $\boldsymbol{-\frac{G^2mM^2}{8A_0^2}}$

Ⅲ (1) 半径 r_n、速度 v_n として、次の2つの関係が成り立っている。

$$\begin{cases} G\dfrac{Mm}{r_n^2} = m\dfrac{v_n^2}{r_n} \\ 2\pi r_n = n\dfrac{h}{mv_n} \end{cases}$$

連立して v_n を消す $\dfrac{GMm}{\cancel{r_n}} \times 4\pi^2 r_n^{\cancel{2}} = \cancel{m}\cancel{v_n^2} \times \dfrac{n^2h^2}{m^{\cancel{2}}\cancel{v_n^2}}$ $\quad r_n = \dfrac{n^2h^2}{4\pi^2 GMm^2}$

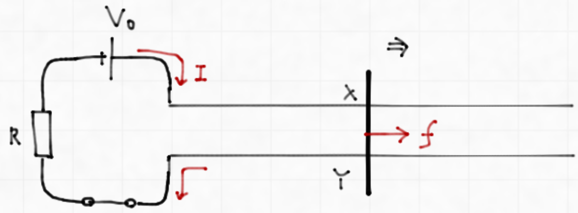
(2) $n=1$, $r_1 = R = 10^{22}$, $\dfrac{h}{2\pi} = 10^{-34}$, $M = 10^{42}$, $G = 10^{-10}$ を代入。

$$10^{22} = \frac{1^2}{10^{-10}\cdot 10^{42}\ m^2}\left(10^{-34}\right)^2$$

$$m^2 = 10^{10-42-68-22} = 10^{-122} \qquad m = 10^{-61}\ (\mathrm{kg})$$

2

I (1) 電流I，力fは右の図のようになっている



左手の法則より 磁場は鉛直 下[イ] 向き

力fは $f = BId$ [ア]

導体棒が右に動くことで回路を貫く下向きの磁束が増加する．誘導起電力は，上向きの磁場を作るような向きの電流を流そうとする向きなので（レンツの法則）Y→Xの向き（X[ウ]側を正とする起電力）

導体棒が速度vで動いているとき，

$$V = Bvd, \quad V_0 - V = IR$$

の関係が成り立っている．十分な時間が経ったとき，$V_0 - V = 0$ となり電流値は0となる （$V_0 = V$）[エ]

このとき $v = \frac{V_0}{Bd}$ [オ]

(2) 運動方程式は $m\frac{\Delta s}{\Delta t} = BId$

$\therefore \Delta s = \frac{BId}{m}\Delta t \qquad \Delta V = B\Delta s\, d = \frac{B^2d^2I}{m}\Delta t$

(3) もとめる電気量を Q とすると，$Q = \int_0^\infty I\,dt$ が成り立つ．

また，運動量と力積の関係式より

$$m\frac{V_0}{Bd} = \int_0^\infty BId\,dt = BdQ \qquad \therefore Q = \frac{mV_0}{B^2d^2}$$

(4) (3)より $Q = \left(\frac{m}{B^2d^2}\right)V_0$ が成り立ち，これはこの回路が容量 $\frac{m}{B^2d^2}$ のコンデンサーのように考えられることを意味している．したがって到達速さにいたるまでに必要な仕事は，コンデンサーの蓄えるエネルギーを参照して

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m}{B^2d^2}\right)V_0^2$$

$s_0 = \frac{V_0}{Bd}$ だから $\frac{1}{2}ms_0^2$

(5) 電池が供給したエネルギーは $QV_0 = \frac{mV_0^2}{B^2d^2} = ms_0^2$ だから，半分は導体棒の運動エネルギーに変換され，残りの半分は抵抗でジュール熱に変換されたと分かる．

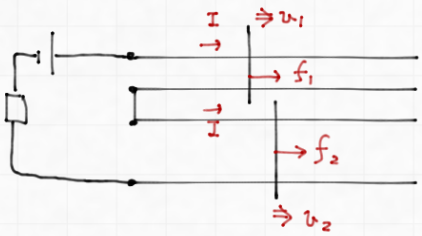
運動エネルギー $\frac{1}{2}QV_0$ 熱エネルギー $\frac{1}{2}QV_0$

II 到達速さは $\frac{V_0}{B\cdot 2d}$ となるので $\frac{1}{2}$[カ] 倍になる．誘導起電力は $B\frac{V_0}{B\cdot 2d}\times 2d = V_0$ なので 1[キ] 倍になる

スイッチを切っていた場合，電流は流れないので到達速さは変わらず 1[ク] 倍，起電力は $B\cdot\frac{V_0}{Bd}\cdot 2d = 2V_0$

すなわち 2[ケ] 倍となる

III
$$\begin{cases} V_0 - Bv_1d - Bv_2\cdot 2d = IR \\ f_1 = BId, \quad f_2 = BI\cdot 2d \end{cases}$$



$f_1 : f_2$ は常に $1:2$ だから $v_1 : v_2 = 1:2$ （$v_2 = 2v_1$）

十分に時間が経って $I \to 0$ のとき，$V_0 - Bv_1d - B\cdot 2v_1\cdot 2d = 0 \qquad v_1 = \frac{V_0}{5Bd}$

導体棒1の到達速さ $\frac{V_0}{5Bd}$ 導体棒2の到達速さ $\frac{2V_0}{5Bd}$

3

I $W_1 = -W_{AB}$

$= \frac{3}{2}R(T_B - T_A)$

$W_2 = p_B(V_C - V_B)$

$= R(\frac{4}{5}T_A - T_B)$

$W_3 = -W_{CD}$

$= \frac{3}{2}R(T_D - \frac{4}{5}T_A)$

II (1) $\Delta U_4 = \frac{3}{2}R(T_E - T_D)$

(2) $W_4 = -p_A(V_E - V_D)$

$= -R(T_E - T_D)$

(3) X, Y 全体を考えてとき.
外部から熱量をもらっていない

$Q_Y + \frac{5}{2}R(T_E - T_D) = 0$

	Y		X
A	$p_Y V_Y = RT_A$		$p_A V_A = RT_A$, $p_A S = a^5 mg$
		① 断熱膨張 ↓	$0 = \underbrace{W_{AB}}_{\boxed{正}} + \frac{3}{2}R(T_B - T_A)$
B	〃		$p_B V_B = RT_B$, $p_B S = mg$
		② 定圧 ↓	$\frac{5}{2}R(\frac{4}{5}T_A - T_B) = p_B(V_C - V_B) + \frac{3}{2}R(\frac{4}{5}T_A - T_B)$
C	〃		$p_B V_C = R\cdot\frac{4}{5}T_A$, $p_B S = mg$
		③ 断熱圧縮 ↓	$0 = \underbrace{W_{CD}}_{\boxed{負}} + \frac{3}{2}R(T_D - \frac{4}{5}T_A)$
D			$p_A V_D = RT_D$, $p_A S = a^5 mg$
	↓ $Q_Y = 0 + \frac{3}{2}R(T_E - T_A)$	④ 定圧 ↓	$\frac{5}{2}R(T_E - T_D) = p_A(V_E - V_D) + \frac{3}{2}R(T_E - T_D)$
E	$p_Y' V_Y = RT_E$		$p_A V_E = RT_E$, $p_A S = a^5 mg$

したがって

$$\frac{3}{2}R(T_E - T_A) + \frac{5}{2}R(T_E - T_D) = 0$$

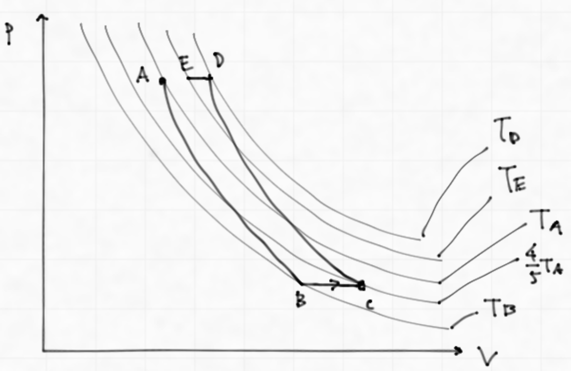
$$3T_E - 3T_A + 5T_E - 5T_D = 0 \qquad T_E = \frac{3}{8}T_A + \frac{5}{8}T_D$$

III (1) $\Delta U_Y > 0$ となるのは $T_A < T_E$ のときで、II (3) の結果より. $T_A < \frac{3}{8}T_A + \frac{5}{8}T_D$ より. $T_A < T_D$ のとき.

$\frac{p_B}{p_A} = a^5 < 1$

A, B, C, D, E のときの X の温度は $T_A > T_B < \frac{4}{5}T_A < T_D > T_E$

$T_D > T_A$ と併せると. $\overset{B}{T_B} < \overset{C}{\frac{4}{5}T_A} < \overset{A}{T_A} < \overset{E}{T_E} < \overset{D}{T_D}$ ⇒ **オ**



(2) $T_A < T_D = \frac{4}{5}a^2 T_A$ だから

$a^2 > \frac{5}{4}$ $\qquad a > \frac{\sqrt{5}}{2}$

(3) 操作 ①〜③ について 気体が外部からもらう熱量は Q_2 のみ.
操作 ④ では X と Y でエネルギーが移動しただけ.
したがって X と Y をまとめて考えたとき. 熱力学第1法則より

$$Q_2 = -W + \underbrace{\Delta U_Y \times 2}_{\text{X と Y のいずれも } \Delta U_Y \text{ 増}}$$

$$\Delta U_Y = \frac{Q_2 + W}{2}$$

(4) n 回目の操作後の Y の温度を T_n とする. $T_1 = T_E$

操作 ④ のとき. $\frac{3}{2}RT_n + \frac{3}{2}RT_D = \frac{3}{2}RT_{n+1} \times 2$ $\qquad$ $n \to \infty$ のとき $T_n = T_{n+1} = T_\infty$ として

$\frac{3}{2}RT_\infty = \frac{3}{2}RT_D$ $\qquad$ ∴ $T_\infty = T_D = \frac{4}{5}a^2 T_A$