岡山理科大学2021 1/30実施 1A118

1 $\vec{a} = (1, 2, \sqrt{3})$, $\vec{b} = (\sqrt{3}, 0, 3)$

(1) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + \sqrt{3}^2} = \mathbf{2\sqrt{2}}$

(2) $|\vec{b}| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 0^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3} + 0 + 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad \theta = \mathbf{45^\circ}$

(3) $\vec{c} = (a, b, c)$ とする

$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ より $\quad a + 2b + \sqrt{3}c = 0$

$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ より $\quad \sqrt{3}a + 3c = 0$

$|\vec{c}| = 2$ より $\quad a^2 + b^2 + c^2 = 2^2$

以上を連立 $\quad \vec{c} = (a, b, c) = \mathbf{(\sqrt{3}, 0, -1), (-\sqrt{3}, 0, 1)}$

岡山理科大学2021　1/30実施 1A118

2

(1) $\sin 2x = \sqrt{3}\sin x$

$2\sin x\cos x = \sqrt{3}\sin x$

$\sin x(2\cos x - \sqrt{3}) = 0$

$\sin x = 0$ または $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$　　$0 < x < \pi$ でこれらを満たすのは $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6}}$

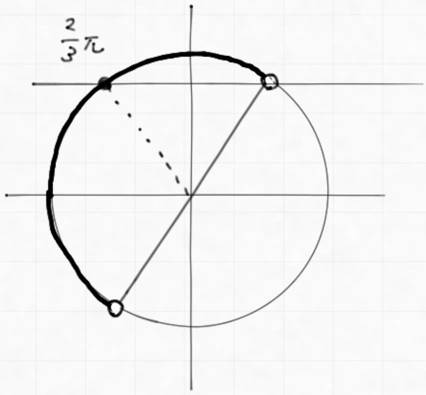
(2) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{3}$

$2\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$

$\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 < x < \pi$ のとき　$\frac{\pi}{3} < x + \frac{\pi}{3} < \frac{4}{3}\pi$

右図より　$x + \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$　$\therefore\ \boldsymbol{x = \frac{\pi}{3}}$



(3) 合成して　$\cancel{2}\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = \cancel{2}\sqrt{3}\sin(x + \frac{\pi}{6})$

$x + \frac{\pi}{6} = \theta$ とすると　$\sin 2\theta = \sqrt{3}\sin\theta \ldots ①$　$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7}{6}\pi$

(1)より ① は $\sin\theta(2\cos\theta - \sqrt{3}) = 0$ と変形でき，$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{7}{6}\pi$ で，これを満たすのは $\theta = \pi = x + \frac{\pi}{6}$　$\therefore\ \boldsymbol{x = \frac{5}{6}\pi}$

岡山理科大学2021 1/30実施 1A11B

3

(1) $k=3$ のとき

$$P=\frac{1}{3}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\ ,\quad 3\leqq l\leqq m,\quad l+m=7$$

$3\leqq l\leqq m$ かつ $l+m=7$ を満たす l, m は $l=3,\ m=4$ のみだから P の値は

$$P=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4+4+3}{12}=\mathbf{\frac{11}{12}}$$

(2) $k+l+m\geqq k+k+k$ だから $3k\leqq 10\quad k\leqq\frac{10}{3}$

よって k のとりうる値は $k=\mathbf{1,2,3}$ の3つ.

(3) $k=1$ のとき

$$P=1+\frac{1}{l}+\frac{1}{m},\quad 1\leqq l\leqq m\ ,\ l+m=9$$

$(l, m)=(1,8),(2,7),(3,6),(4,5)$

$$P=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{8},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{7},\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6},\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{17}{8},\ \frac{23}{14},\ \frac{3}{2},\ \frac{29}{20}$$

$k=2$ のとき

$$P=\frac{1}{2}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\ ,\quad 2\leqq l\leqq m\ ,\ l+m=8$$

$(l, m)=(2,6),(3,5),(4,4)$

$$P=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{7}{6},\ \frac{31}{30},\ 1$$

以上より P の最大値は $\mathbf{\frac{17}{8}}$ そのとき $(k, l, m)=\mathbf{(1,1,8)}$

最小値は $\mathbf{\frac{11}{12}}$ そのとき $(k, l, m)=\mathbf{(3,3,4)}$

4　(1) $f(3) = 27 - 45 + \cancel{6a^2} \cancel{-3a} + 15 - \cancel{6a^2} \cancel{+3a} + 3 = 0$

(2) $f(x) = (x-3)(x^2 - 2x + 2a^2 - a - 1)$

$f(x) = 0$ の解が全て実数となるのは $x^2 - 2x + 2a^2 - a - 1 = 0$ が実数解を持つときで、

その判別式をDとして

$D/4 = 1^2 - 2a^2 + a + 1 = -2a^2 + a + 2 \geqq 0$　　$2a^2 - a - 2 \leqq 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{17}}{4} \leqq a \leqq \frac{1+\sqrt{17}}{4}$

aは正の整数で、$\frac{1+\sqrt{17}}{4} < \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2}$、$\frac{1-\sqrt{17}}{4} > \frac{1-5}{4} = -1$ だから **$a = 1$**

このとき $f(x) = (x-3)(x^2 - 2x)$ となるので **$x = 0, 2, 3$**

(3) $p^3 = (3-x)(x^2 - 2x + 2a^2 - a - 1)$

$3-x$、$x^2 - 2x + 2a^2 - a - 1$ はいずれも整数だから、上式が成り立つためには、

$3-x$はp^3の約数でなければならない。

またxは正の整数だから $3 - x \leqq 3 - 1 = 2$

よって $3-x = 1$ または 2 であり、$x = 2$ または 1.

(i) $x = 1$ のとき、　$p^3 = 2 \cdot (2a^2 - a - 2)$

pは素数で右辺は2の倍数だから $p = 2$.

$2^3 = 2(2a^2 - a - 2)$

$2a^2 - a - 6 = 0$

$(2a+3)(a-2) = 0$　　$\therefore a = 2$.

(ii) $x = 2$のとき　$p^3 = 1 \cdot (2a^2 - a - 1) = (2a+1)(a-1)$

左辺p^3と右辺が一致するためには、

$a-1$はp^3の約数、すなわち、$a - 1 = 1, p, p^2, p^3$ が成り立たなければならない

$a = 2$のとき　$p^3 = 5$　… 不適

$a = p+1$ 〃　$p^3 = (2p+3)p$　$p^2 - 2p - 3 = 0$　$p = 3, -1$　pは素数だから$p=3$

$a = p^2 + 1$ 〃　$p^3 = (2p^2+3)p^2$　$2p^2 - p + 3 = 0$　$p = \frac{3}{2}, -1$ … 不適

$a = p^3 + 1$ 〃　$p^3 = (2p^3+3)p^3$　$2p^3 + 2 = 0$　$p = -1$ … 不適

以上より　**$(a, p) = (2, 2), (4, 3)$**

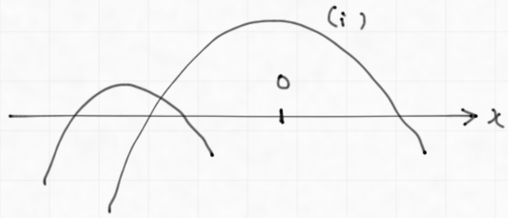
岡山理科大学2021 1/30実施 IAIIB

5 (1) $f(x) = -(x+3)^2 - 1$ 　　頂点は $\mathbf{(-3, -1)}$

(2) $y - 2 = -(x-4)^2 - 6(x-4) - 10$

$y = -x^2 + 2x = g(x)$

$g(x) = 0$ を解くと. $\mathbf{x = 0,\ 2}$



(3) $g(x) = -(x-2a)^2 - 6(x-2a) - 10 + a$

$= -x^2 + (4a-6)x - 4a^2 + 13a - 10$

(i) $g(0) = -4a^2 + 13a - 10 \geqq 0$ のとき

$\left(4a^2 - 13a + 10 \leqq 0 \iff (4a-5)(a-2) \leqq 0 \iff \frac{5}{4} \leqq a \leqq 2 \right)$

$y = g(x)$ のグラフは右上図 (i) のようになるので. $x \leqq 0$ で 1つの実数解をもつ.

(ii) $g(0) < 0$ のとき. $\left(a < \frac{5}{4},\ a > 2 \right)$

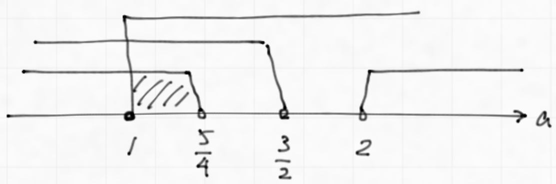
$y = g(x)$ は $g(x) = -(x - 2a + 3)^2 + (2a-3)^2 - 4a^2 + 13a - 10$

$= -(x - 2a + 3)^2 + a - 1$

と変形できるので $2a - 3 < 0$ かつ. $a - 1 \geqq 0$ のとき、少なくとも 1つ、0以下の実数解をもつ

整理して $a < \frac{3}{2},\ a \geqq 1$

$\therefore\ 1 \leqq a < \frac{5}{4}$



(i)(ii) より $\mathbf{1 \leqq a \leqq 2}$ のとき. $g(x) = 0$ は 0以下の実数解を少なくとも1つもつ