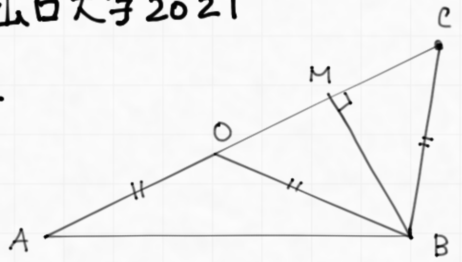
山口大学2021

11



$\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$ とおく.

条件より $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{3}{5}$

(1) $|\vec{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=1+\frac{6}{5}+1=\frac{16}{5}$

よって $|\vec{AB}|=\frac{4}{\sqrt{5}}$ ∴ ABの長さは $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

(2) Cは直線OA上にあるので $\vec{OC}=k\vec{a}$

$|\vec{BC}|=1$より. $|\vec{OC}-\vec{b}|^2=1 \Leftrightarrow |k\vec{a}-\vec{b}|^2=1^2$

$\Leftrightarrow k^2-2k\vec{a}\cdot\vec{b}+\cancel{1}=\cancel{1} \Leftrightarrow k\left(k+\frac{6}{5}\right)=0 \Leftrightarrow k=0,-\frac{6}{5}$

CとAは異なるので $\vec{OC}=-\frac{6}{5}\vec{a}$ よって $|\vec{OC}|=\frac{6}{5}|\vec{a}|=\frac{6}{5}$ ∴ OCの長さは $\frac{6}{5}$

(3) △OABの内接円半径をr_1とする.

△OABの面積S_1は $S_1=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{2}{5}$

また $S_1=\frac{OA+OB+AB}{2}\times r_1$ より $r_1=\frac{2\cdot\frac{2}{5}}{1+1+\frac{4\sqrt{5}}{5}}=\frac{4}{10+4\sqrt{5}}=\frac{10-4\sqrt{5}}{5}$

△OBCの内接円の半径をr_2とする

BからOCに下ろした垂線の足をMとすると BO=BC だからMはOCの中点で $OM=\frac{1}{2}OC=\frac{3}{5}$

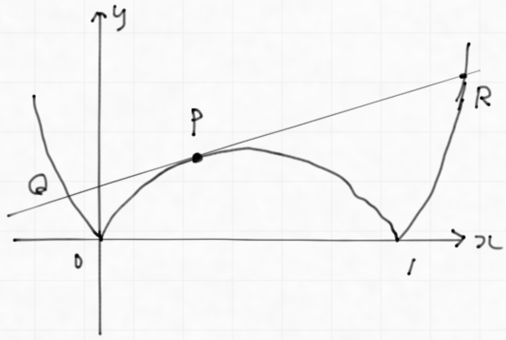
$BM=\sqrt{OB^2-OM^2}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$

△OBCの面積S_2は $S_2=\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{25}$

また $S_2=\frac{OB+BC+OC}{2}\times r_2$ より $r_2=\frac{2\cdot\frac{12}{25}}{1+1+\frac{6}{5}}=\frac{24}{80}=\frac{3}{10}$

山口大学2021

12



(1) $0<x<1$のとき. $y=|x^2-x| = -(x^2-x)$

$y=mx+n$と $y=-x^2+x$ が接することから連立した

$$-x^2+x = mx+n \iff x^2+(m-1)x+n=0 \quad \cdots ①$$

は重解を持つ. 判別式をDとして.

$$D=(m-1)^2-4n=0 \iff m-1=\pm 2\sqrt{n} \quad (\because n\text{は正の実数})$$

$$\iff m=1\pm 2\sqrt{n}$$

$D=0$のとき ①は

$$x^2\pm 2\sqrt{n}+n=0 \iff (x\pm\sqrt{n})^2=0 \quad \text{より} \quad x=\mp\sqrt{n}$$

ここで 接点の x座標は $0<x<1$の範囲にあるので $x=\sqrt{n}$ であり,

$$\boldsymbol{m = 1-2\sqrt{n}}$$

(2) $x=\boldsymbol{\sqrt{n}}$

(3) $x<0$ または $x>1$のとき $y=|x^2-x| = x^2-x$

これと $y=mx+n$の交点をもとめる

$$x^2-x = mx+n$$

$$x^2-(1+m)x-n=0$$

$$x=\frac{1+m\pm\sqrt{(1+m)^2+4n}}{2}=\frac{2-2\sqrt{n}\pm\sqrt{4+4n-8\sqrt{n}+4n}}{2}=\frac{2-2\sqrt{n}\pm 2\sqrt{2n-2\sqrt{n}+1}}{2}$$

$QP:PR=1:3$ だから $PR=3QP$

$$\frac{2-2\sqrt{n}+2\sqrt{2n-2\sqrt{n}+1}}{2}-\sqrt{n}=3\left(\sqrt{n}-\frac{2-2\sqrt{n}-2\sqrt{2n-2\sqrt{n}+1}}{2}\right)$$

$$2-2\sqrt{n}+2\sqrt{2n-2\sqrt{n}+1}-2\sqrt{n}=6\sqrt{n}-6+6\sqrt{n}+6\sqrt{2n-2\sqrt{n}+1}$$

$$4\sqrt{2n-2\sqrt{n}+1}+16\sqrt{n}-8=0$$

$$\sqrt{2n-2\sqrt{n}+1}=2-4\sqrt{n}$$

$$2n-2\sqrt{n}+1=4+16n-16\sqrt{n}$$

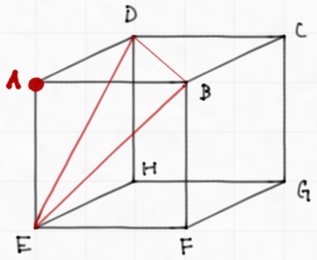
$$14n-14\sqrt{n}+3=0$$

$$\sqrt{n}=\frac{7\pm\sqrt{49-42}}{14}=\frac{7\pm\sqrt{7}}{14}$$

$$m=1-2\sqrt{n}=1-\frac{7\pm\sqrt{7}}{7}=\mp\frac{1}{\sqrt{7}} \qquad m>0\text{だから } m=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{7}}}$$

山口大学2021

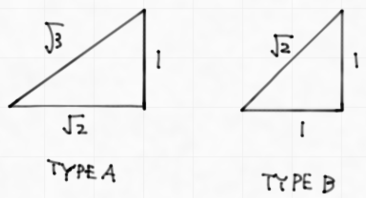
13

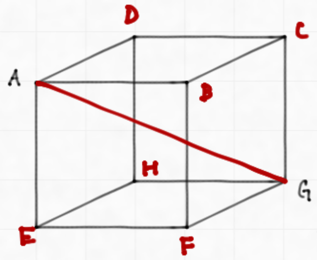


(1) 正三角形の1つBDEについて、このBDEの平面で切りとられる頂点Aに注目する。全ての正三角形は必ず1つの頂点を切りとることから正三角形の個数と立方体の頂点の個数は等しい。

よってTが正三角形となるのは **8通り** ある

(2) 直角三角形は次の2種類



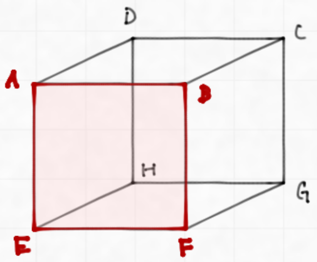


TYPE A について

斜辺は立方体の対角線で、頂点の個数÷2 = 4通り

左の例のように、1つの対角線（左例ではAG）に対し、他の6つの頂点のいずれかと結ぶとTYPE Aの直角三角形となる

$$4\times 6 = 24 \text{通り}$$



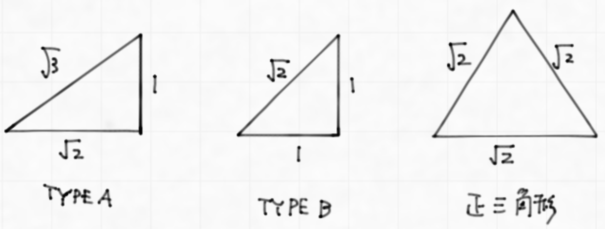
TYPE B について、

正方形の各面（左例ではABFE）の4つの頂点のうちの3つを選ぶとTYPE Bの直角二等辺三角形となる

$$6\times {}_4C_3 = 24 \text{通り。}$$

以上を併せて $24+24=48$ 通り

(4) 三角形は以下の3通り



その各辺の長さの和は

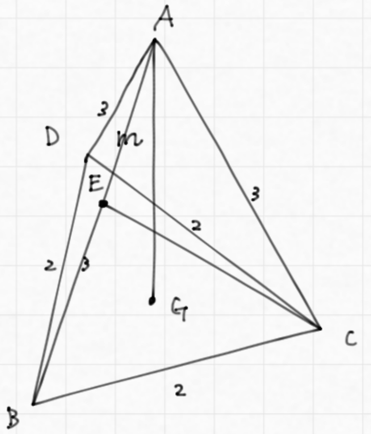
TYPE A	$1+\sqrt{2}+\sqrt{3} > 1+1.4+1.7 > 4$
TYPE B	$1+1+\sqrt{2} = 2+\sqrt{2} < 4$
正三角形	$\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2} = 3\times\sqrt{2} > 3\times 1.4 > 4$

よって、もとめる確率をPとして

$$P = \frac{24+8}{{}_8C_3} = \frac{\cancel{32}^{\,4}}{\cancel{56}_{\,7}} = \frac{4}{7}$$

山口大学2021

14



(1) △ABCについて余弦定理を考える

$$\cos\angle BAC = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC} = \frac{3^2+3^2-2^2}{2\cdot 3\cdot 3} = \mathbf{\frac{7}{9}}$$

(2) △AECについて余弦定理を考える

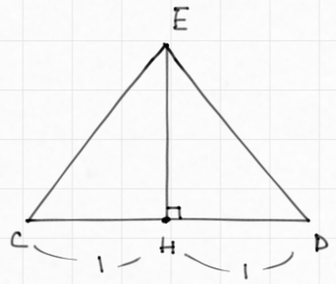
$$EC^2 = AE^2+AC^2-2\cdot AE\cdot AC\cdot \cos\angle BAC$$

$$= m^2+9-6m\cdot\frac{7}{9} = m^2-\frac{14}{3}m+9$$

$$EC = \sqrt{m^2-\frac{14}{3}m+9}$$

図形の対称性より △AEC≡△AED だから、

$$ED = EC = \sqrt{m^2-\frac{14}{3}m+9}$$



(3) △ECDはEC＝EDの二等辺三角形だから

EからCDに下ろした垂線の足をHとして　EH⊥CD　かつ　CH＝HD.

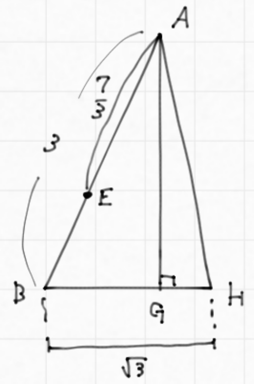
$$EH = \sqrt{EC^2-1^2} = \sqrt{m^2-\frac{14}{3}+8}$$

△ECDの面積をSとすると

$$S = \frac{1}{2}\times CD\times EH = \frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{m^2-\frac{14}{3}+8} = \sqrt{(m-\frac{7}{3})^2+8-(\frac{7}{3})^2} = \sqrt{(m-\frac{7}{3})^2+\frac{23}{9}}$$

EはAB上にあるので　$0<m<3$　だから、

Sは　$m=\mathbf{\frac{7}{3}}$　のとき最小となり、最小値は　$\mathbf{\frac{\sqrt{23}}{3}}$



(4) △BCDの重心をGとすると、対称性より、AGはBCDと垂直。

ABGを含む平面で四面体ABCDを切ると右のようになる

$BH=\sqrt{3}$　で　$BG:GH = 2:1$　だから　$BG=\frac{2}{3}\sqrt{3}$

$$AG = \sqrt{AB^2-BG^2} = \sqrt{9-\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{23}{3}}$$

また、$BE:EA = 3-\frac{7}{3}:\frac{7}{3} = 2:7$

よってEからBCDに下ろした垂線の長さは　$AG\times\frac{2}{9} = \frac{2}{9}\sqrt{\frac{23}{3}}$

△BCDの面積は　$\frac{1}{2}\times BC\times BD\times\sin 60^\circ = \sqrt{3}$

以上より四面体EBCDの体積Vは

$$V = \sqrt{3}\times\frac{2}{9}\sqrt{\frac{23}{3}}\times\frac{1}{3} = \mathbf{\frac{2\sqrt{23}}{27}}$$