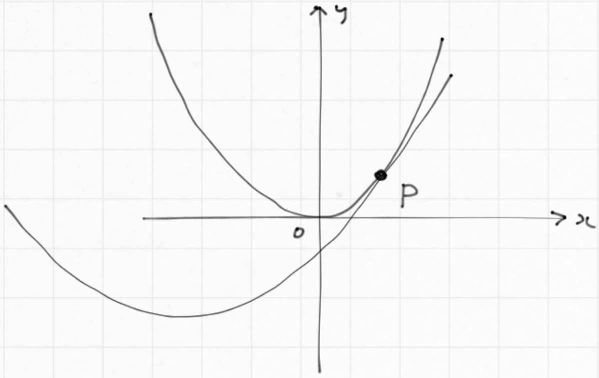
大阪府立大2021前期



1 (1) $x^2 = f(x)$, $ax^2+bx+c = g(x)$ とおく

$f'(x) = 2x$, $g'(x) = 2ax+b$

$x=p$ において $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は接するので

$f(p) = g(p) \Leftrightarrow ap^2 - p^2 + bp + c = 0$

$f'(p) = g'(p) \Leftrightarrow 2ap - 2p + b = 0$

以上より $b = \mathbf{-2p(a-1)}$, $c = (1-a)p^2 + 2p^2(a-1) = \mathbf{(a-1)p^2}$

(2) $g(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$

$-\frac{b}{2a} = +\frac{2p(a-1)}{2a} = \frac{p(a-1)}{a}$　　$c - \frac{b^2}{4a} = (a-1)p^2 - \frac{\cancel{4}p^2(a-1)^2}{\cancel{4}a} = \frac{(a-1)p^2}{a}$

頂点は $(x, y) = \left(\frac{a-1}{a}p, \frac{a-1}{a}p^2\right)$

(3) $\vec{OQ} = \frac{a-1}{a}\vec{OP}$.　$0<a<1$ だから $a-1<0$　よって Q・O, P は この順に一直線上にある.

$\frac{OQ}{OP} = \frac{|\vec{OQ}|}{|\vec{OP}|} = \left|\frac{a-1}{a}\right| = \frac{1-a}{a}$

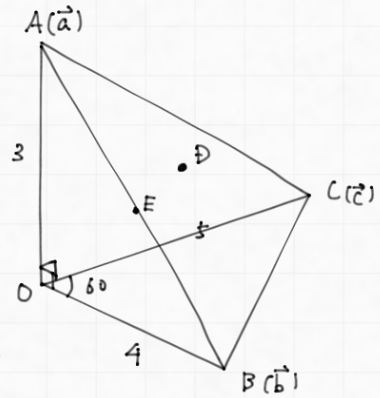
(4) Q(X, Y) とおくと.　$X = \frac{a-1}{a}p$, $Y = \frac{a-1}{a}p^2$

$p = \frac{a}{a-1}X$ を Y の式に代入　$Y = \frac{a-1}{a} \times \left(\frac{a}{a-1}\right)^2 X^2 = \frac{a}{a-1}X^2$

また pは全の実数値をとるが, このとき Xも全ての実数値をとる.

よって Q の軌跡は $y = \frac{a}{a-1}x^2$

大阪府立大2021前期



2 (1) 条件より $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4,\ |\vec{c}|=5$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot4\cdot\cos90^\circ=0,\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=4\cdot5\cos60^\circ=10.$

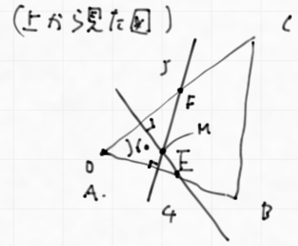
$\vec{c}\cdot\vec{a}=5\cdot3\cdot\cos90^\circ=0$

$|\vec{OD}|=|\vec{AD}|=|\vec{BD}|=|\vec{CD}|$

$$\left|\tfrac{1}{2}\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\right|^2=\left|-\tfrac{1}{2}\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\right|^2=\left|\tfrac{1}{2}\vec{a}+(s-1)\vec{b}+t\vec{c}\right|^2=\left|\tfrac{1}{2}\vec{a}+s\vec{b}+(t-1)\vec{c}\right|^2$$

$$\cancel{\tfrac{9}{4}}+16s^2+25t^2+20st=\cancel{\tfrac{9}{4}}+16s^2+25t^2+20t=\cancel{\tfrac{9}{4}}+16(s-1)^2+25t^2+20t(s-1)=\cancel{\tfrac{9}{4}}+16s^2+25(t-1)^2+20s(t-1)$$

$$0=-32s+16-20t=-50t+25-20s$$



$$\begin{cases}5t+8s=4\\10t+4s=5\end{cases}\qquad (s,t)=\left(\tfrac{1}{4},\ \tfrac{2}{5}\right)$$

(2) $\vec{EM}\cdot\vec{c}=(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}-\tfrac{1}{2}\vec{a}-\tfrac{1}{2}\vec{b})\cdot\vec{c}=0+10y+25z+0+5=0$ **$2y+5z=1$**

(3) BCの中点をF, ACの中点をHとする. $\vec{OF}=\tfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}),\ \vec{OH}=\tfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})$

$\vec{FM}\perp\vec{a}$ より $\vec{FM}\cdot\vec{a}=(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}-\tfrac{1}{2}\vec{b}-\tfrac{1}{2}\vec{c})\cdot\vec{a}=9x+0+0-0-0=0$ $\quad x=0$

$\vec{HM}\perp\vec{b}$ より $\vec{HM}\cdot\vec{b}=(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}-\tfrac{1}{2}\vec{a}-\tfrac{1}{2}\vec{c})\cdot\vec{b}=0+16y+10z-0-5=0$ $\quad 16y+10z=5$

(2)の結果と連立して. $y=\tfrac{1}{4},\ z=\tfrac{1}{10}$

$$\vec{OM}=\tfrac{1}{4}\vec{b}+\tfrac{1}{10}\vec{c}$$

(4) $\vec{OG}=\tfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$\vec{OF}=\tfrac{3}{4}\times\vec{OG}=\tfrac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

(1)より $\vec{OD}=\tfrac{1}{2}\vec{a}+\tfrac{1}{4}\vec{b}+\tfrac{2}{5}\vec{c}$ $\qquad$ (3)より $\vec{OM}=\tfrac{1}{4}\vec{b}+\tfrac{1}{10}\vec{c}$

$$\vec{OF}=\tfrac{1}{4}\vec{a}+\tfrac{1}{4}\vec{b}+\tfrac{1}{4}\vec{c}=\tfrac{1}{2}\vec{OD}-\tfrac{1}{8}\vec{b}-\tfrac{1}{5}\vec{c}+\tfrac{1}{4}\vec{b}+\tfrac{1}{4}\vec{c}$$

$$=\tfrac{1}{2}\vec{OD}+\tfrac{1}{8}\vec{b}+\tfrac{1}{20}\vec{c}=\boldsymbol{\tfrac{1}{2}\vec{OD}+\tfrac{1}{2}\vec{OM}}$$

大阪府立大2021前期

3

(1) ① は実数係数の3次方程式だから、$1+\sqrt{2}i$ と共役な $1-\sqrt{2}i$ も解にもつ。

$(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)=2$.　　$(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=3$ だから $1+\sqrt{2}i$ と $1-\sqrt{2}i$ を解にもつ

2次方程式の1つは

$$x^2-2x+3=0 \quad \cdots ②$$

で、① の左辺は ② で割り切れることになる

$$\begin{array}{r|rrrr} & & 1 & a+2 & \\ \hline 1\ \ -2\ \ 3 & 1 & a & 0 & b \\ & 1 & -2 & 3 & \\ \hline & & a+2 & -3 & b \\ & & a+2 & -2a-4 & 3a+6 \\ \hline & & & 2a+1 & 3a-b+6 \end{array}$$

$$x^3+ax^2+b=(x^2-2x+3)(x+a+2)+(2a+1)x+(3a-b+6)$$

だから、① が ② で割り切れるための条件は $2a+1=0$, $3a-b+6=0$.

$$\therefore\ a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{9}{2}$$

(2) $f(x)=x^3+ax^2+b$ とおく。

$f(x)=0$ が $x=1$ を解にもつので　$f(1)=1+a+b=0$　　$b=-a-1$

このとき、

$$f(x)=x^3+ax^2-a-1=(x-1)(x^2+ax+x+a+1)$$

だから $f(x)=0$ が2重解をもつのは $x^2+ax+x+a+1=g(x)$ として

(i) $g(x)=0$ が $x=1$ ともう1つ1以外の解をもつ

(ii) $g(x)=0$ が $x=1$ 以外の重解をもつ

の2つの条件が考えられる。

(i)について。$g(1)=1+a+1+a+1=0$　$a=-\frac{3}{2}$

このとき。$g(x)=x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=(x-1)(x+\frac{1}{2})$ となるので

$f(x)=0$ は $x=1$ を2重解にもつ

(ii)について。$g(x)=0$ の判別式を D として

$$D=(a+1)^2-4(a+1)=0 \iff (a+1)(a-3)=0 \qquad a=-1,3$$

$a=-1$ のとき　$g(x)=x^2$　だから　$f(x)$ は $x=0$ を2重解にもつ

$a=3$ のとき　$g(x)=x^2+4x+4=(x+2)^2$ だから $f(x)$ は $x=-2$ を2重解にもつ

以上より　$f(x)=0$ が2重解をもつのは $a=-\frac{3}{2}, -1, 3$

このとき $b=-a-1$ より　$b=\frac{1}{2}, 0, -4$.　　$\therefore\ (a,b)=\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right), (-1,0), (3,-4)$

(3) ① の解の個数は $y=f(x)$ と x 軸の交点の個数に一致する。

$$f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$$

$f'(x)=0$ となるのは $x=0, -\frac{2a}{3}$

大阪府立大2021前期

3 つづき

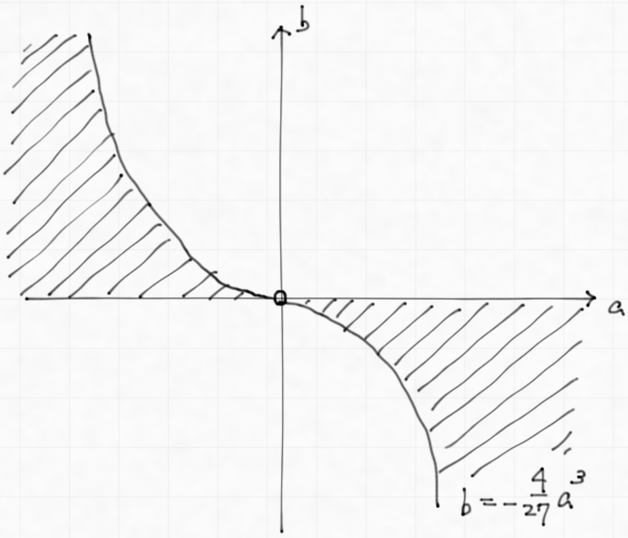
$y=f(x)$ が x 軸と3度交わるのは極大値と極小値が存在し、互いに異符号であることだから

$a \neq 0$, かつ $f(0) \times f\left(-\frac{2a}{3}\right) < 0$

$b \times \left(-\frac{8}{27}a^3 + \frac{4}{9}a^3 + b\right) < 0$

$b(4a^3 + 27b) < 0$

$b > 0$ かつ $b < -\frac{4}{27}a^3$, $b < 0$ かつ $b > -\frac{4}{27}a^3$

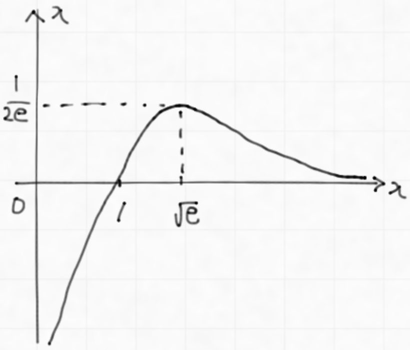


よって条件を満たす (a, b) は右図斜線部の範囲となる(境界、原点は除く)

大阪府立大2021前期

4 (1) $y' = \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - \log x \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{1 - 2\log x}{x^3}$

x	0	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
y'	/	$+$	0	$-$
y	/	↗		↘



$y'=0$ となるのは $x^2=e$ より $x=\sqrt{e}$

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x^2} = 0$, $\lim_{x\to+0} \dfrac{\log x}{x^2} = -\infty$

グラフの増減および概形は右のとおり.

$x=\sqrt{e}$ のとき $y = \dfrac{\frac{1}{2}}{e} = \dfrac{1}{2e}$ $x=\sqrt{e}$ で極大値 $\dfrac{1}{2e}$ をとる.

(2) $x^n = e^{x^2}$

$x>0$ のとき. 両辺の自然対数をとると $n\log x = x^2$

$x=1$ は上式を満たさないので. $x \neq 1$ で. このとき $\dfrac{1}{n} = \dfrac{\log x}{x^2}$

この方程式の解は $y = \dfrac{\log x}{x^2}$ と $y = \dfrac{1}{n}$ の 2つのグラフの交点の x座標と等しいので.

この2つのグラフが交点を持つ条件は $\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{1}{2e}$ が成り立つことだから

$2e \leqq n$ $e = 2.7\cdots$ より. $n \geqq 6$ よって最小の n は $n=6$

(3) 面積をSとして

$a>1$のとき

$S = \displaystyle\int_1^a \frac{\log x}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\log x\right]_1^a + \int_1^a \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{1}{a}\log a - \left[\frac{1}{x}\right]_1^a = -\frac{1}{a}\log a - \frac{1}{a} + 1 = 1$

$\log a = -1$. $a = \dfrac{1}{e} < 1$ 解なし

$a<1$のとき

$S = \displaystyle\int_a^1 \left|\frac{\log x}{x^2}\right| dx = \int_1^a \frac{\log x}{x^2}dx = -\frac{1}{a}\log a - \frac{1}{a} + 1 = 1$

$\log a = -1$. $a = \dfrac{1}{e} < 0$ $\therefore a = \dfrac{1}{e}$

以上より $a = \dfrac{1}{e}$