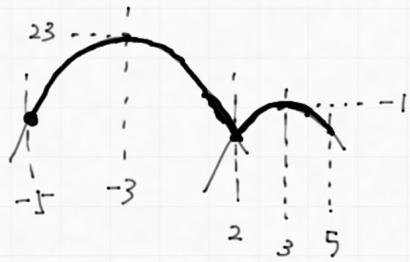
麻布大学2021

1 (1) $x \geqq 2$ のとき $f(x) = -x^2+6x-10 = -(x-3)^2-1$

$x < 2$ のとき $f(x) = -x^2-6x+14 = -(x+3)^2+23$




$f(-5) = 19$ , $f(2) = -2$ $f(5) = -5$

$x = \mathbf{5}$ のとき 最小値 $\mathbf{-5}$ $x = \mathbf{-3}$ のとき最大値 $\mathbf{23}$

(2) $n$が偶数 $\underset{真}{\overset{真}{\rightleftarrows}}$ $n(n+2)$が8の倍数 2

(3) ${}_{2021}C_0 + {}_{2021}C_1 + \cdots + {}_{2021}C_{2021} = (1+1)^{2021}$

$\log_{10} 2^{2021} = 2021 \times 0.301 = 608.321$ $2^{2021} = 10^{608} \times 10^{0.321}$ **609桁**

(4) 初項を $a$ とする

$r=1$ のとき. 条件より $100a = 1$, $200a = 6$ となるので条件を満たす$a$は存在しない.

$r \neq 1$ のとき. 条件より $\dfrac{a(1-r^{100})}{1-r} = 1$, $\dfrac{ar^{100}(1-r^{200})}{1-r} = 6$

連立して $\dfrac{r^{100}(1-r^{200})}{1-r^{100}} = 6$ $r^{100}(1+r^{100}) = 6$ $(r^{100})^2 + r^{100} - 6 = 0$ $r^{100} = -3, 2$

$r^{100} = \mathbf{2}$

$$S_{600} = \frac{a(1-r^{600})}{1-r} = \frac{1}{1-r^{100}} \times (1-r^{600}) = \frac{1}{1-2}(1-2^6) = \mathbf{63}$$

(5) 等差中項の公式より $-2+b = 2a$

等比中項の公式より $a \times (-2) = b^2$

連立して $b^2+b-2=0$ $b = 1, -2$

$b=1$ のとき $a = -\frac{1}{2}$ これは $-2<a<0<b$ を満たす

$b=-2$ のとき $a = -2$ これは $-2<a<0<b$ を満たさない $\therefore a = \mathbf{-\frac{1}{2}}$ $b = \mathbf{1}$

(6) 連立方程式は2直線の交点をもとめることと考えることができる. このとき. 交点が唯1つ存在するための条件は2直線が平行でないことと考えられる.

2直線の法線ベクトルはそれぞれ $(2, a)$, $(1, b)$. で これらが平行となるのは

$2b - a \times 1 = 0 \iff a = 2b$

のときで $(a, b) = (1, 2), (2, 4), (3, 6)$ の3通り.

もとめる確率はその余事象だから $1 - \dfrac{3}{6^2} = \mathbf{\dfrac{11}{12}}$

# 麻布大学2021

(7) $21^{20} = (20+1)^{20} = {}_{20}C_0\, 20^{20} + {}_{20}C_1 \cdot 20^{19} + \cdots + {}_{20}C_{18}\, 20^2 + {}_{20}C_{19}\, 20^1 + {}_{20}C_{20}$

$\equiv {}_{20}C_{18}\, 20^2 + {}_{20}C_{19}\, 20^1 + {}_{20}C_{20} \quad (\mathrm{mod}\ 1000)$

$= \dfrac{20 \times 19}{2} \times 20^2 + 20 \times 20 + 1$

$= 19 \times 2^2 \times 1000 + 400 + 1$

$\equiv \mathbf{401} \quad (\mathrm{mod}\ 1000)$

(8) $16a = 1 \qquad a = 2^{-4}.$

$2\log_a 64 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^b = 2 \times \dfrac{\log_2 2^6}{\log_2 2^{-4}} + 0.6^{\log_{0.6} 64} = -\dfrac{1}{2} \times 6 + 64 = \mathbf{61}$

(9) $\sin 20\alpha = \sin 240^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

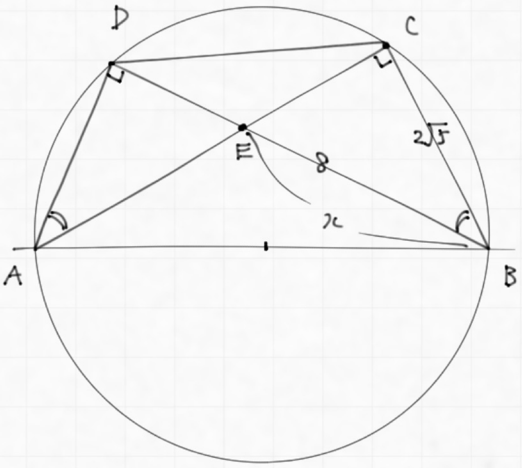
$\sin 55\alpha = \sin 660^\circ = \sin(-60^\circ) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 65\alpha = \sin 780^\circ = \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{\sin 20\alpha}{\sin 55\alpha \sin 65\alpha} = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \mathbf{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$

# 麻布大学2021

## Ⅱ




円周角の定理より $\angle CAD = \angle CBD$

$\cos\angle CAD = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\triangle BCD$で余弦定理

$CD^2 = 8^2 + (2\sqrt{5})^2 - 2\cdot 8\cdot \cancel{2\sqrt{5}}\,\frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}}$

$= 64 + 20 - 64 = 20 \qquad CD = \mathbf{2\sqrt{5}}$

正弦定理

$2R = AB = \dfrac{CD}{\sin\angle CBD} = \dfrac{2\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \mathbf{10}$

$\triangle ABD$で三平方の定理

$AD^2 = AB^2 - BD^2 = 100 - 64 = 36 \qquad AD = \mathbf{6}$

$BE = x$とおく

$EC = BE\sin\angle DBC = \frac{\sqrt{5}}{5}x$

$\triangle ADE \backsim \triangle BCE$より $AD : BC = DE : CE = 8-x : \frac{\sqrt{5}}{5}x$

$6 : 2\sqrt{5} = 8-x : \frac{\sqrt{5}}{5}x \qquad 16\sqrt{5} - 2\sqrt{5}x = \frac{6}{5}\sqrt{5}x \qquad x = \frac{5}{16}\times 16 = 5$

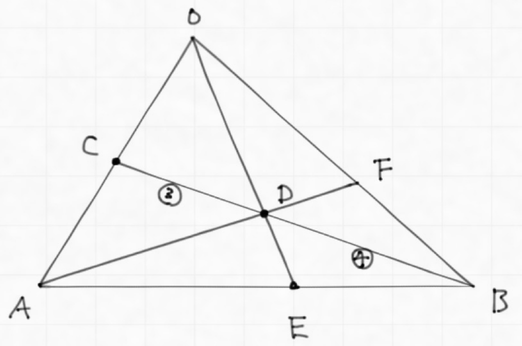
$EC = 5 \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \mathbf{\sqrt{5}}$

$\triangle ADC = \frac{1}{2}AD\cdot AC\cdot\sin\angle CAD = \frac{1}{2}\times 6\times\sqrt{10^2-(2\sqrt{5})^2}\times\frac{\sqrt{5}}{5} = 12$

$\triangle CDE = \dfrac{EC}{AC}\times\triangle ADC = \dfrac{\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}\times 12 = \mathbf{3}$

麻布大学2021

Ⅲ




(1) $\overrightarrow{OD} = \frac{4}{7}\overrightarrow{OC} + \frac{3}{7}\overrightarrow{OB} = \mathbf{\frac{2}{7}}\overrightarrow{OA} + \mathbf{\frac{3}{7}}\overrightarrow{OB}$

(2) $\overrightarrow{OD} = \frac{5}{7}\left(\mathbf{\frac{2}{5}}\overrightarrow{OA} + \mathbf{\frac{3}{5}}\overrightarrow{OB}\right) = \frac{5}{7}\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + k\left(\frac{2}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{7}\overrightarrow{OB}\right) - k\overrightarrow{OA}$

$= \left(1 - \frac{5}{7}k\right)\overrightarrow{OA} + \frac{3}{7}k\overrightarrow{OB}$

FはOB上にあるので $1 - \frac{5}{7}k = 0$ $k = \frac{7}{5}$

$\therefore \overrightarrow{OF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{OB} = \mathbf{\frac{2}{5}}\overrightarrow{OA}$

$S_2 = \triangle OAB - \triangle OCF - \triangle ACE - \triangle BEF$

$= S_1 - S_1 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} - S_1 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} - S_1 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 = S_1\left(1 - \frac{3}{10} - \frac{3}{10} - \frac{4}{25}\right) = \frac{6}{25}S_1$

$\frac{S_2}{S_1} = \mathbf{\frac{6}{25}}$

麻布大学2021

IV

$$\int_0^1 (px-1)(x+q)\,dx = \left[\ \frac{1}{3}px^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}pqx^2 - qx\right]_0^1 = \frac{1}{3}p + \frac{1}{2}pq - q - \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 (px-1)^2\,dx = \left[\frac{1}{3}(px-1)^3 \times \frac{1}{p}\right]_0^1 = \frac{1}{3p}(p-1)^3 + \frac{1}{3p}$$

$$\int_0^1 (x+q)^2\,dx = \left[\ \frac{1}{3}(x+q)^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}(q+1)^3 - \frac{1}{3}q^3$$

(1) $I_1 - I_2 = \left(\frac{1}{3}p + \frac{1}{2}pq - q - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3p}\left\{(p-1)^3 + 1\right\} \times \frac{1}{3}\left\{(q+1)^3 - q^3\right\}$

$$= \cancel{\frac{1}{9}p^2} + \frac{1}{4}p^2q^2 + \cancel{q^2} + \frac{1}{4} + \cancel{\frac{1}{3}p^2q} - \frac{2}{3}pq \cancel{- \frac{1}{3}p} \cancel{- pq^2} - \frac{1}{2}pq + \cancel{q}$$

$$- \frac{1}{9}\left(3p^2q^2 + \cancel{3p^2q} + \cancel{p^2} \cancel{- 9pq^2} - 9pq \cancel{- 3p} + \cancel{9q^2} + \cancel{9q} + 3\right)$$

$$= \frac{1}{4}p^2q^2 + \frac{1}{4} - \frac{2}{3}pq - \frac{1}{2}pq - \frac{1}{3}p^2q^2 + pq - \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{1}{12}p^2q^2 - \frac{1}{6}pq - \frac{1}{12} = -\frac{1}{12}(pq+1)^2$$

(2) $I_1 = I_2$ が成り立つのは (1)より $pq+1=0$ のとき.

$y = px-1$ と $y = x+q$ を連立して　$px-1 = x+q$　　$x = \frac{q+1}{p-1} = \frac{-\frac{1}{p}+1}{p-1} = \frac{p-1}{p^2-p} = \frac{1}{p}$

このとき $y = p\cdot\frac{1}{p} - 1 = 0$　よって交点は $\left(\frac{1}{p}, 0\right)$

麻布大学2021

V

(1) 4人のうちの1人が勝つ　$_4C_1$

その手の出し方　$_3C_1$

他の3人の手の出し方　$1^3$

$$\frac{_4C_1 \cdot {_3C_1} \cdot 1^3}{3^4} = \frac{4}{27}$$

(2) 4人でじゃんけんをして1人だけが負ける　$\frac{_4C_1 \cdot {_3C_1} \cdot 1^3}{3^4} = \frac{4}{27}$

3人でじゃんけんをして1人だけが負ける　$\frac{_3C_1 \cdot {_3C_1} \cdot 1^2}{3^3} = \frac{1}{3}$

2人でじゃんけんをして勝負がつく　$\frac{2}{3}$

$$\frac{4}{27} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{243}$$

(3) 4人でじゃんけんをして勝敗がつくのは　$_3C_2(2^4-2)$

引き分けとなるのはその余事象

$$\frac{3^4 - {_3C_2}(2^4-2)}{3^4} = \frac{81-3\cdot 14}{81} = \frac{39}{81} = \frac{13}{27}$$

2回目で勝者が決まるのは(1)より $\frac{4}{27}$

$$\therefore \frac{13}{27} \times \frac{4}{27} = \frac{52}{729}$$

麻布大学2021

VI

| | | | | | | 合計 | 平均 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $a$ | $10+a$ | $2+\frac{1}{5}a$ | $\frac{2}{5}\ \times 2$ |
| $x-\bar{x}$ | $-1-\frac{1}{5}a$ | $-\frac{1}{5}a$ | $1-\frac{1}{5}a$ | $2-\frac{1}{5}a$ | $\frac{4}{5}a-2$ | 0 | | |
| $(x-\bar{x})^2$ | $1+\frac{2}{5}a+\frac{1}{25}a^2$ | $\frac{1}{25}a^2$ | $1-\frac{2}{5}a+\frac{1}{25}a^2$ | $4-\frac{4}{5}a+\frac{1}{25}a^2$ | $\frac{16}{25}a^2-\frac{16}{5}a+4$ | $\frac{4}{5}a^2-4a+10$ | $\frac{4}{25}a^2-\frac{4}{5}a+2$ | |
| $y$ | 3 | 2 | 5 | 6 | 4 | 20 | 4 | |
| $y-\bar{y}$ | $-1$ | $-2$ | 1 | 2 | 0 | 0 | | |
| $(y-\bar{y})^2$ | 1 | 4 | 1 | 4 | 0 | 10 | 2 | |
| $(x-\bar{x})(y-\bar{y})$ | $1+\frac{1}{5}a$ | $\frac{2}{5}a$ | $1-\frac{1}{5}a$ | $4-\frac{2}{5}a$ | 0 | 6 | $\frac{6}{5}$ | |

$$r=\frac{\frac{6}{5}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{4}{25}a^2-\frac{4}{5}a+2}}$$

$$\frac{4}{25}\left(a^2-5a\right)+2=\frac{4}{25}\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+1$$

$a=\frac{5}{2}$ のとき最大 $\quad r=\dfrac{\frac{6}{5}}{\sqrt{2}\ \sqrt{1}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$