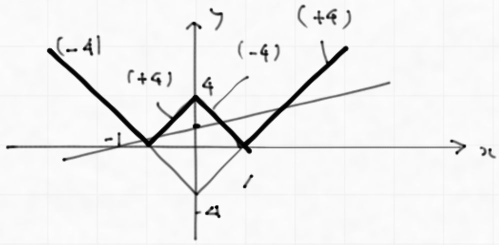
慶應義塾2022 医

1 (1)



$y = -4x-4 = x+2 \qquad x = -\frac{6}{5}$

$y = 4x+4 = x+2 \qquad x = -\frac{2}{3}$

$y = -4x+4 = x+2 \qquad x = \frac{2}{5}$

$y = 4x-4 = x+2 \qquad x = 2$

$$x = -\frac{6}{5},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{5},\ 2$$

(2) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 = x^3(x^2+x+1)+x^2+x+1)$

$= (x^3+1)(x^2+x+1) = (x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

(3) $f(x)$ の定義域は $3x^3-2x^2 \geqq 0 \iff x^2(3x-2) \geqq 0 \qquad x=0,\ x \geqq \frac{2}{3} \quad \cdots A$

$g(x)$ の定義域は $3x^2-2>0 \iff x>\sqrt{\frac{2}{3}},\ x<-\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \cdots B$

$A \cap B \ \cdots \ x > \sqrt{\frac{2}{3}}$

$f(x)+g(x) = -\log_3\sqrt{3x^3-2x^2} + \frac{1}{2}\log_3(3x^2-2)$

$= \frac{1}{2}\log_3\left(\frac{3x^2-2}{3x^3-2x^2}\right) < \log_3 1$

$\frac{3x^2-2}{3x^3-2x^2} < 1$

$\iff 3x^3-2x^2-3x^2+2>0$

$\iff (x-1)(3x^2-2x-2)>0$

$\iff \frac{1-\sqrt{7}}{3} < x < 1,\ x > \frac{1+\sqrt{7}}{3}$

このうち

$A \cap B$ の条件を満たすのは. $\sqrt{\frac{2}{3}} < x < 1,\ x > \frac{1+\sqrt{7}}{3}$

(2)

$f_{n+1}(x) = (f_n \circ f_1)(x)$

$a_{n+1}x + b_{n+1} = a_n(a_1x+b_1)+b_n$

$\qquad\qquad = \alpha a_n + \beta a_n + b_n$

これが x の値にかかわらず成り立つので

$a_{n+1} = \alpha a_n, \quad b_{n+1} = \beta a_n + b_n$

$\{a_n\}$ は公比 α の等比数列だから $a_n = a_1\alpha^{n-1} = \alpha^n$

このとき $b_{n+1} = b_n + \alpha^n\beta$

$n \geqq 2$ のとき $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\alpha^k\beta = \beta + \alpha\beta\frac{\alpha^{n-1}-1}{\alpha-1} = \frac{\alpha^n\beta-\beta}{\alpha-1}$

$n=1$ としても上式は成り立つ.

$\therefore\ b_n = \beta\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}$

2 (1) $2n$個の玉は全て区別する. n個の取り出し方は ${}_{2n}C_n$

赤玉をi個取り出すのは ${}_kC_i \times {}_{(2n-k)}C_{n-i}$

$$p(n,k,i) = \frac{{}_kC_i \times {}_{(2n-k)}C_{n-i}}{{}_{2n}C_n} = {}_kC_i \frac{n!\ n!\ (2n-k)!}{(2n)!\ (n-i)!\ (n-k+i)!}$$

$$= {}_kC_i \frac{(2n-k)!}{(2n)!} \times \frac{n!}{(n-i)!} \times \frac{n!}{(n-k+i)!}$$

$$= {}_kC_i \times \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-i+1)\cdot n(n-1)\cdots(n-k+i+1)}{2n\cdot(2n-1)\cdots(2n-k+1)}$$

$$= {}_kC_i \times \frac{1\times(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{i-1}{n})\cdot 1\cdot(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-i-1}{n})}{2\cdot(2-\frac{1}{n})(2-\frac{2}{n})\cdots(2-\frac{k-1}{n})}$$ （分母分子を n^k で割った）

$$\longrightarrow {}_kC_i \times \frac{1}{2^k} \qquad \therefore \lim_{n\to\infty} p(n,k,i) = \boldsymbol{\frac{{}_kC_i}{2^k}}$$ （あ）

$$P(n,3,1) = {}_3C_1 \cdot \frac{{}_{2n-3}C_{n-1}}{{}_{2n}C_n} = 3 \times \frac{n!\ n!\ (2n-3)!}{(2n)!\ (n-1)!\ (n-2)!} = \frac{3\cancel{n}\cdot n\cdot(n-1)}{2\cancel{n}(2n-1)(2n-2)}$$

$$= \frac{3n\cancel{(n-1)}}{2(2n-1)\underset{2}{(2\cancel{n-2})}} = \boldsymbol{\frac{3n}{4(2n-1)}}$$ （い）

(2) 状態Sを $(A,B)=(1,2)$ と表し、

同様に Aに赤玉が2つあるときを $(A,B)=(2,1)$ などと表す.

$$(A,B)=(1,2) \xrightarrow{\frac{n-1}{n}\times\frac{2}{n}} (A,B)=(2,1)$$

$$(A,B)=(1,2) \xrightarrow{\ *\ } (A,B)=(1,2)$$

$$(A,B)=(1,2) \xrightarrow{\frac{1}{n}\times\frac{n-2}{n}} (A,B)=(0,2)$$

$$* \ldots \frac{1}{n}\times\frac{2}{n} + \frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n} = \frac{n^2-3n+4}{n^2}$$

（う） $$\frac{2(n-1)}{n^2}\times\frac{2}{n} + \frac{n^2-3n+4}{n^2}\times\frac{1}{n}$$

$$= \frac{4n-4+n^2-3n+4}{n^3} = \frac{n^2+n}{n^3} = \boldsymbol{\frac{n+1}{n^2}}$$

（え） $$\frac{\frac{4(n-1)}{n^3}}{\frac{n+1}{n^2}} = \boldsymbol{\frac{4(n-1)}{n(n+1)}}$$

(3) 袋Aの赤玉の個数の変遷は,

$1\to2\to3\to0$, $1\to2\to2\to3$, $1\to1\to2\to3$ のいずれか.

$$\frac{2(n-1)}{n^2}\times\left(\frac{n-2}{n}\times\frac{1}{n}\right)\times\left(\frac{n-3}{n}\times\frac{n}{n}\right) + \frac{2(n-1)}{n^2}\times\left(\frac{2}{n}\times\frac{1}{n}+\frac{n-2}{n}\times\frac{n-1}{n}\right)\times\left(\frac{n-2}{n}\times\frac{1}{n}\right)$$

$$+ \frac{n^2-3n+4}{n^2}\times\frac{2(n-1)}{n^2}\times\frac{n-2}{n^2} = \frac{(n-1)(n-2)}{n^6}\left(2n^2-6n+2n^2-6n+8+2n^2-6n+8\right)$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{n^6}\left(6n^2-18n+16\right) = \boldsymbol{\frac{2(n-1)(n-2)(3n^2-9n+8)}{n^6}}$$ （お）

(4) $$\frac{{}_{n-1}C_3}{{}_nC_3} \times \frac{{}_2C_2\times{}_{n-2}C_1}{{}_nC_3} = \frac{6^{\cancel{2}}\cdot\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}(n-3)\cdot1\cdot\cancel{(n-2)}}{n^2(n-1)^{\cancel{2}}\cancel{(n-2)^2}\cdot\cancel{6}} = \boldsymbol{\frac{6(n-3)}{n^2(n-1)}}$$ （か）

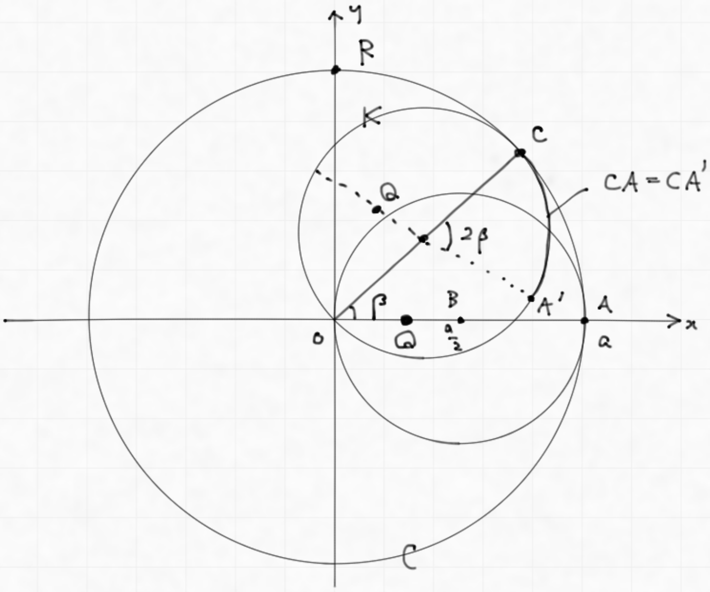
3

(1) $x' + y'i = \Big((x + yi) - (s + ti)\Big)(\cos\alpha + i\sin\alpha) + s + ti$

$= (x-s)\cos\alpha - (y-t)\sin\alpha + i\{(y-t)\cos\alpha + (x-s)\sin\alpha\} + s + ti$

$x' = (x-s)\cos\alpha - (y-t)\sin\alpha + s$

$y' = (y-t)\cos\alpha + (x-s)\sin\alpha + t$



(2) (i) $B\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ を中心に**時計回り**に **2β** 回転

それを (ii) 原点を中心に**反時計回り**に β 回転

(3) 誘導にのらない.

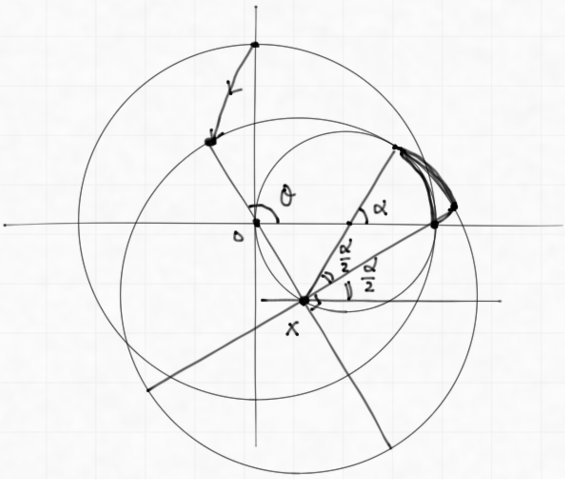
$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} \times \frac{a}{2} + \left(b - \frac{a}{2}\right)\begin{pmatrix} \cos(-\beta) \\ \sin(-\beta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a}{2}\cos\beta + \left(b - \frac{a}{2}\right)\cos\beta \\ \frac{a}{2}\sin\beta - \left(b - \frac{a}{2}\right)\sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$x = b\cos\beta, \quad y = (a-b)\sin\beta$

$\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1 = \dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{(a-b)^2}$

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{(a-b)^2} = 1}$$



(4) C は $\alpha - \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$ だけ回転する

元に戻るのは **2** 回転したとき

$\pi - \theta + \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

図中の $OX = a\sin\dfrac{\alpha}{2}$

OR の長さは $a - OX$ だから

$r = a - a\sin\dfrac{\alpha}{2} = a\left(1 - \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$

$= a\left(1 - \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

$= a(1 + \cos\theta)$

$\therefore\ \boldsymbol{r = a(1 + \cos\theta)}$

4

$g(x) = (x-a)^2 + (x^2-b)^2$

$g'(x) = 2(x-a) + 2(x^2-b)\times 2x = 4x^3 - 4bx + 2x - 2a$

$g''(x) = 2 + 4(x^2-b) + 4x \times 2x$

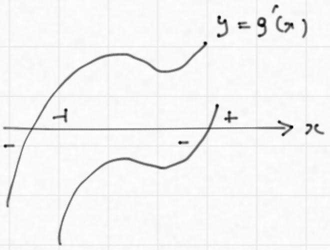
$\quad = 12x^2 - 4b + 2$

$(-\infty, \infty)$で下に凸となるのはxの値にかかわらず $g''(x) \geqq 0$

$g''(x) \geqq g''(0) = 2 - 4b \geqq 0 \qquad b \leqq \frac{1}{2}$ (あ)

$b > \frac{1}{2}$ のとき. $g''(x) = 0$ を解くと $x = \pm\sqrt{\frac{2b-1}{6}}$ (い) $-\sqrt{\frac{2b-1}{6}}$ (う) $\sqrt{\frac{2b-1}{6}}$

$g'(x)$ のグラフがx軸と1度だけ交わればよい (x軸と接してはいけない)

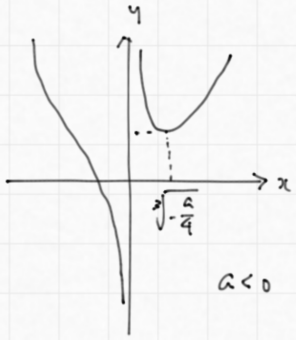


$4x^3 - 4bx + 2x - 2a = 0$

$x = 0$ が解となるのは $a = 0$ のとき.

このとき $4x^3 - 4bx + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - b + \frac{1}{2}) = 0$

となるので. $b - \frac{1}{2} \leqq 0$ のとき条件を満たす. ... (*)



$x \neq 0$ のとき.

$b = x^2 + \frac{1}{2} - \frac{a}{2x} = h(x)$ とおく

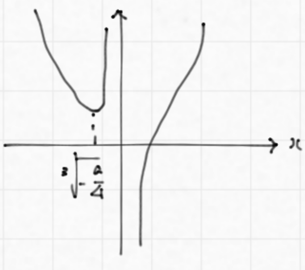
$h'(x) = 2x + \frac{a}{2x^2} = \frac{4x^3 + a}{2x^2}$

$x = \sqrt[3]{-\frac{a}{4}}$ のとき $h'(x) = 0$

$a < 0$ のときのグラフは左のようになっており

$b \leqq h\left(\sqrt[3]{-\frac{a}{4}}\right) = \left(-\frac{a}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} - \frac{a}{2}\sqrt[3]{-\frac{4}{a}} = \left(\frac{a^2}{16}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} + \left(\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\qquad = \frac{3}{2}\left(\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}$



$a > 0$ のときのグラフは左のようになっており.

$b \leqq h\left(\sqrt[3]{-\frac{a}{4}}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}$

$a = 0$ のとき. (*) のとき条件を満たすが. 上式右辺は $a = 0$ のとき $b = \frac{1}{2}$ となり. (*)と同じ値をとる.

以上まとめて. $b \leqq \frac{3}{2}\left(\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} = F(a)$

(お) $b = F(a)$ のとき $2b - 1 = 3\left(\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ を $g'(x)$ に代入

$4x^3 - 6\left(\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}x - 2a = 0 \qquad (2a)^{\frac{1}{3}} = A$ として $4x^3 - \cancel{6}\cdot\cancel{2^{-\frac{1}{3}}}\cdot\cancel{2^{-\frac{2}{3}}}A^2x - A^3 = 0$

$\Leftrightarrow 4x^3 - 3A^2x - A^3 = 0 \Leftrightarrow (x-A)(4x^2 + 4Ax + A^2) = 0 \Leftrightarrow (x-A)(2x+A)^2 = 0$

$x = A = \sqrt[3]{2a}$ のとき最小となる

(か) $F(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}$

$F'(x) = \frac{\cancel{3}}{2} \times \frac{1}{\cancel{3}}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} \times x \quad = \frac{x}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$

$\{F'(x)\}^2 + 1 = \frac{x^2}{4} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} + 1 = x^{2-\frac{8}{3}} \cdot 2^{-2+\frac{4}{3}} + 1 = x^{-\frac{2}{3}} \cdot 2^{-\frac{2}{3}} + 1$

$F(x) = x^2$ となるのは

$\frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} = x^2$

$3\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 2x^2 - 1$

上式は $x^2 = 2$ のとき成立し、他に解はない.

$L = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + (2x)^{-\frac{2}{3}}}\, dx = \int_0^{\sqrt{2}} x^{-\frac{1}{3}} \sqrt{x^{\frac{2}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}}\, dx$

$\left(x^{\frac{2}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$ だから

$L = \int_0^{\sqrt{2}} \left(x^{\frac{2}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(x^{\frac{2}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}\right)' \times \frac{3}{2}\, dx$

$= \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \times \left[\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{2}} = \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} - 2^{-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}}$

$= \left\{2^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\right\}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} = \left(2^{-\frac{2}{3}} \times 3\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} - \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3} - 1}{2}$

細かい点は説明不足ばかり… とにかく答を出しました.