大阪医科薬科大2022前期

1

(1) ${}_{10}C_3 = \dfrac{10\cdot \overset{3}{\cancel{9}}\cdot \overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 120$ 通り

(2) 120通りのうち黒石が3つ連続で並ぶのは 8通り $(1\sim3,\ 2\sim4,\ \ldots\ 8\sim10)$

$\dfrac{8}{120} = \dfrac{1}{15}$

(3) 条件にあわないのは

(i) 3つの黒石が連続しているとき.

(ii) 2つの黒石が連続し、もう1つの黒石とのあいだに1つだけ白石があるとき.

(iii) 3つの黒石は全て離れ、あいだに1つずつ白石があるとき.

(i)は 8通り (∵(2))

(ii) ●●○● と ●○●● のいずれかの形が含まれる. $7\times2=14$通り

(iii) ●○●○● の形が含まれる 6通り.

(i)(ii)(iii)を併せて、求める確率は $1-\dfrac{8+14+6}{120} = 1-\dfrac{\overset{7}{\cancel{28}}}{\underset{30}{\cancel{120}}} = \dfrac{23}{30}$

2 (1) $\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(x^m) = \frac{1}{k!}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(mx^{m-1}) = \frac{1}{k!}\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}\left(m(m-1)x^{m-2}\right)$

$= \cdots = \frac{1}{k!}\left(m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)\,x^{m-k}\right) = \frac{m!}{k!(m-k)!}x^{m-k} = {}_mC_k\, x^{m-k}$

したがって

$\text{右辺} = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(x^m) = \sum_{k=0}^{m} {}_mC_k\, x^{m-k} = (x+1)^m$ 証明終

(2) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ とおく.

$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + 1\right)$

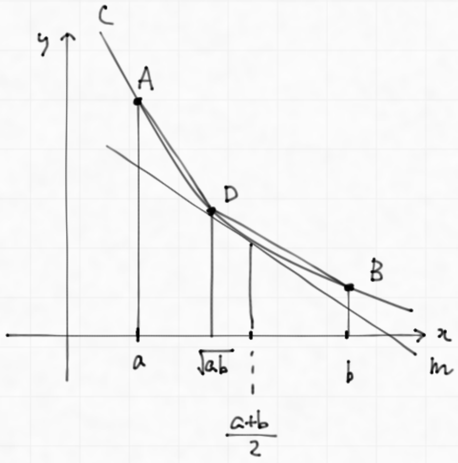
$= a_n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(x^n) + a_{n-1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}x^{n-1} + \cdots + a_1\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}x + a_0\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}1$

$= a_n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(x^n) + a_{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(x^{n-1}) + \cdots + a_1\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}x + a_0\sum_{k=0}^{0}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}1$

$= a_n(x+1)^n + a_{n-1}(x+1)^{n-1} + \cdots + a_1(x+1)^1 + a_0$

$= f(x+1)$

3



(1) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log x\Big]_a^b = \boldsymbol{\log\frac{b}{a}}$

(2) $x=\sqrt{ab}$ のとき $y=\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$

$$S(T) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)\times(\sqrt{ab}-a)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)(b-\sqrt{ab})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\cancel{-1}\cancel{+1}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+\frac{1}{2}\left(\cancel{1}-\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\cancel{-1}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}} = \boldsymbol{\frac{b-a}{\sqrt{ab}}}$$

$x=\dfrac{a+b}{2}$ のときの接線について $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ だから.

$$y = -\frac{4}{(a+b)^2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{2}{a+b}$$

$$y = -\frac{4}{(a+b)^2}x+\frac{4}{a+b}$$

$x=a$ のとき $\quad y = -\dfrac{4a}{(a+b)^2}+\dfrac{4}{a+b} = \dfrac{4b}{(a+b)^2}$

$x=b$ のとき. $\quad y = -\dfrac{4b}{(a+b)^2}+\dfrac{4}{a+b} = \dfrac{4a}{(a+b)^2}$

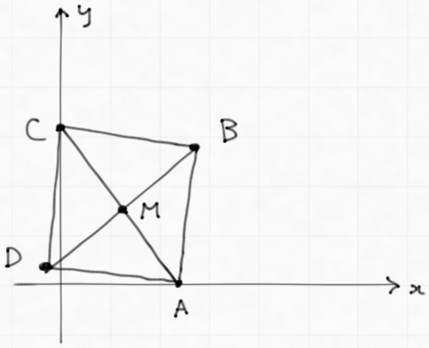
$$S(U) = \left(\frac{4a}{(a+b)^2}+\frac{4b}{(a+b)^2}\right)\times\frac{1}{2}\times(b-a) = \boldsymbol{\frac{2(b-a)}{a+b}}$$

(3) 右上図より $\quad S(U) < S(R) < S(T)$

$$\frac{2(b-a)}{a+b} < \log\frac{b}{a} < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$$

$$\frac{2}{a+b} < \frac{\log b-\log a}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

4



(1) $\vec{CA} = (\cos\theta, -\sin\theta)$

$\vec{DB} \perp \vec{CB}$ だから $\vec{DB} = (\sin\theta, \cos\theta)$

$(\because |\vec{CA}| = |\vec{DB}| = 1)$

$\vec{MB} = \left(\frac{1}{2}\sin\theta, \frac{1}{2}\cos\theta\right)$

(2) $\vec{OB} = \vec{OM} + \vec{MB}$

$= \left(\frac{\cos\theta + \sin\theta}{2}, \frac{\cos\theta + \sin\theta}{2}\right)$ $\quad\therefore$ B$\left(\frac{\cos\theta+\sin\theta}{2}, \frac{\cos\theta+\sin\theta}{2}\right)$

$\vec{OD} = \vec{OM} - \vec{MB}$

$\therefore$ D$\left(\frac{\cos\theta - \sin\theta}{2}, \frac{\sin\theta - \cos\theta}{2}\right)$

(3) $|\vec{OA}| = |\cos\theta| \leqq 1$, $|\vec{OC}| = |\sin\theta| \leqq 1$

$|\vec{OB}| = \frac{\sqrt{2}}{2}|\cos\theta + \sin\theta| = \left|\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leqq 1$

$|\vec{OD}| = \frac{\sqrt{2}}{2}|\cos\theta - \sin\theta| = \left|\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right| \leqq 1$

よってABCDは原点からの距離が1以下で $x^2+y^2 \leqq 1$ によって表される領域に含まれる.

(4) $\theta = 0$ のとき、A$(1, 0)$, C$(0, 0)$, B$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, D$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき A$(0, 0)$, C$(0, 1)$, B$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, D$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

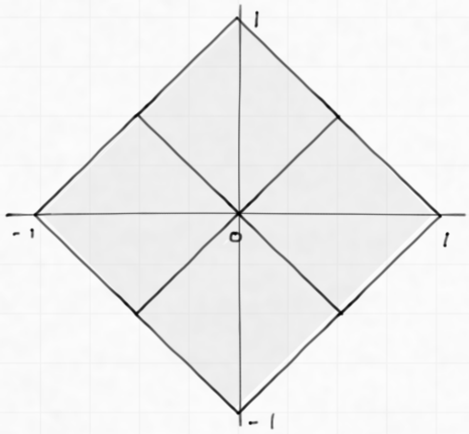
$\theta = \pi$ のとき A$(-1, 0)$, C$(0, 0)$, B$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, D$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\theta = \frac{3}{2}\pi$ のとき A$(0, 0)$, C$(0, -1)$, B$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, D$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

以上の4つのときを図示すると右のようになり.

その面積は $\frac{1}{2} \times 4 = 2$

したがってWの面積は2以上である.



5

(1) a_nについて

(i) $x_n=n$のとき．

$(1,x_1),(2,x_2),\cdots(n-1,x_{n-1})$は対称な順列で．その総数は a_{n-1}

(ii) $x_n=k$のとき　$(k\neq n)$

(n,k)が線対称な点となることが必要で　$x_k=n$

残った $n-2$ 個の点は対称な順列となるのは　a_{n-2}

kは $1,2,\cdots,n-1$ の $n-1$ 通りあるので．　$a_{n-2}\times(n-1)$

(i)(ii)より　$a_n=a_{n-1}+(n-1)a_{n-2}\quad(n\geqq 3)$

(2) (1)で $n=3k+1$ とすると

$$a_{3k+1}=a_{3k}+3k\,a_{3k-1}\equiv a_{3k}\pmod 3$$

$n=3k+2$ とすると

$$\begin{aligned}a_{3k+2}&=a_{3k+1}+(3k+1)a_{3k}\\&\equiv a_{3k}+a_{3k}\pmod 3\\&\equiv 2a_{3k}\pmod 3\end{aligned}$$

(3) (1)で $n=3k+3$ とすると

$$\begin{aligned}a_{3k+3}&=a_{3k+2}+(3k+2)a_{3k+1}\\&\equiv 2a_{3k}+2a_{3k}\pmod 3\quad(\because (2))\\&\equiv a_{3k}.\pmod 3\end{aligned}$$

ここで $a_3=a_2+2a_1=2+2=4\equiv 1\pmod 3$

であり．$a_{3k}\equiv 1$ のとき $a_{3k+3}\equiv 1$ なので．数学的帰納法により $a_{3k}\equiv 1\pmod 3$

(2)より　$a_{3k+1}\equiv a_{3k}\equiv 1\pmod 3$

$a_{3k+2}\equiv 2a_{3k}\equiv 2\pmod 3$

も成り立つので

$a_n\not\equiv 0\pmod 3$ が示された．