産業医大2022

1 (1) x ガンマ だとすると

$x \times 80 \times 5 \times 60$ (μg) $= 24000x \times 10^{-3}$ (mg) $= 7.2$ より $x = 0.3 = \mathbf{3.0 \times 10^{-1}}$ (ガンマ)

(2) 溶量を V(mL) とすると

7.2 (mg) $= 3$ (g/mL) $\times 10^3 \times \dfrac{V}{10^3}$　　$V = \dfrac{7.2}{3} = \mathbf{2.4}$ (mL)

(3) 5時間で　$5 \times 60 \times 60 \div 9 = 2000$ 滴が滴下される

100 mL ÷ 2000 滴 $= 0.05$ mL $= 5.0 \times 10^{-2}$ mL/滴

1mL 投与するには　$1 \div (5 \times 10^{-2}) = 20$ 滴が必要　　$\mathbf{2.0 \times 10^1}$ 滴

2 (1) ヒット&ブローというゲームです。

(iii)より含まれている数は 1.5.6.9 の4つ.

(i)について ~~3~~ 6 ~~2~~ 5　　6と5のどちらかは位置も正しい。 …①

(ii)について 1 5 ~~8~~ ~~7~~　　1と5のどちらかは位置も正しい。 …②

①について 4番目が5だとする (5の位置が正しいとする)

このとき、6は2番目以外 (1または3番目)

②より 5は誤った位置で 1が正しい位置

1 * * 5

6は不可

だから 1 9 6 5　　これは(iii)を満たさない。(4Hとなるため)

①について 2番目が6だとする(6の位置が正しいとする)

このとき 5は4番目以外.

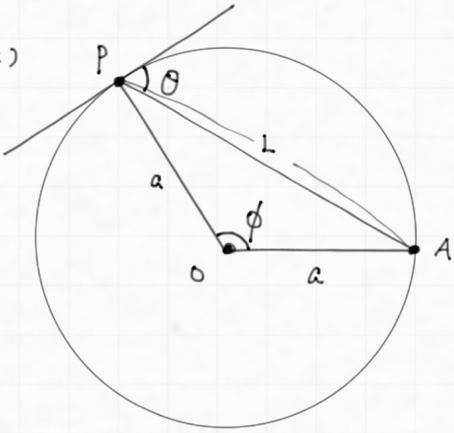
このとき(iii)は　1 9 6 5

H H H

2,3番目は位置は正しくなく、また、5も(i)で6が正しいと考えているので、位置は正しくなく、1番目の1が正しい。

よって甲の用意した数字列は **1659**

(2)



$L = 2a\sin\frac{\phi}{2}$

接弦定理および中心角の定理より $\theta = \frac{\phi}{2}$

$f = L^3\cos\theta = 8a^3\sin^3\theta\cos\theta$

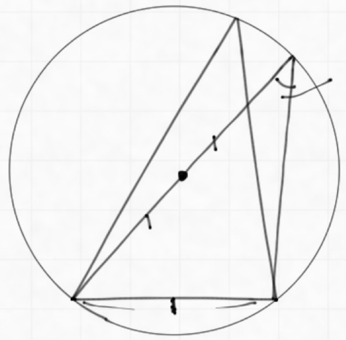
$\frac{df}{d\theta} = a^3 \times 24\sin^2\theta\cos^2\theta + 8a^3 \times \sin^3\theta(-\sin\theta)$

$= 8a^3\sin^2\theta(3\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 8a^3\sin^2\theta(4\cos^2\theta - 1)$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$ のとき、極大かつ最大 $(\theta = \frac{\pi}{3})$

$\cos\varphi = \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$

(3)



1つの辺が中心を通るとき、3辺の長さが1, 2, $\sqrt{3}$の直角三角形だから、長さ1の辺の円周角30°であることが分かる
図形的にこれが最小なのは明らか。

30°

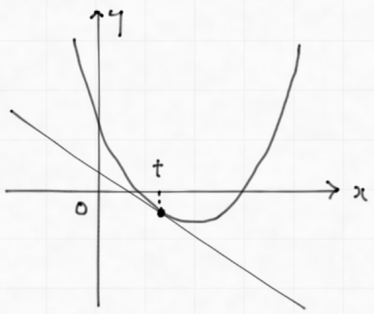
(4) $$4x^2+y^2+8x-4y+4=0$$

$$\Leftrightarrow 4(x+1)^2+(y-2)^2+\cancel{4}-\cancel{4}-4=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+\frac{(y-2)^2}{2^2}=1$$

これは中心が$(-1, 2)$のだ円で、だ円の対称性を考えると、直線はだ円の中心を通ることになる。 よって、もとめる直線は $\boldsymbol{y=-2x}$

(5)



x座標がtのときの接線は $y'=2ax+b$だから、

$$y=(2at+b)(x-t)+at^2+bt+c$$
$$=(2at+b)x-at^2+c$$

この接線とx, y軸との交点は $x=0$のとき $y=-at^2+c$

$y=0$のとき、 $2at+b\neq 0$のとき $x=\dfrac{at^2-c}{2at+b}$

$2at+b=0$のとき、x軸とは交わらない。

よって三角形の面積をSとすると

$$S=\frac{1}{2}\left|-at^2+c\right|\left|\frac{at^2-c}{2at+b}\right|=\frac{(at^2-c)^2}{2|2at+b|}$$

$t=\pm\sqrt{\dfrac{c}{a}}$のとき最小値0をとる。

このとき接線は $\boldsymbol{y=(\pm 2\sqrt{ac}+b)x}$

(6) $$\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\int 1\cdot\sqrt{x^2+1}\,dx=x\sqrt{x^2+1}-\int x\times\cancel{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\times\cancel{2}x\,dx$$

$$=x\sqrt{x^2+1}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx=x\sqrt{x^2+1}-\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$=x\sqrt{x^2+1}-\int\sqrt{x^2+1}\,dx+\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

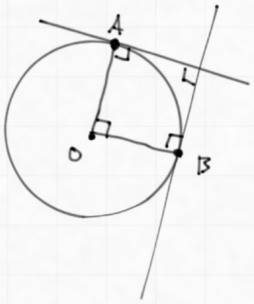
$$\int 2\sqrt{x^2+1}\,dx-\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\boldsymbol{x\sqrt{x^2+1}+C}$$ （Cは積分定数）

(7) $x-1=6\left(1-\sqrt{\frac{1}{x}}\right)=6\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

$\sqrt{x}=t$として　$(t^2-1)t=6t-6 \iff t^3-7t+6=0 \iff (t-1)(t^2+t-6)=0$

$\iff (t-1)(t+3)(t-2)=0$　　$\therefore\ t=2$　　$x=\mathbf{4}$　　$(\because t\neq 1,\ t>0)$

(8)



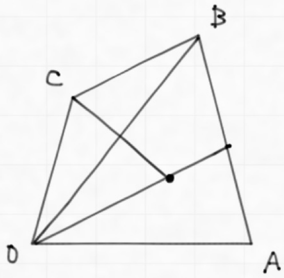
交点と円の中心Oとの距離は常に$\sqrt{2}$だから.

交点の軌跡は　$\boldsymbol{x^2+y^2=2}$

(9) 3つの頂点の選び方は　8^3

そのうち3つが異なるものは　${}_8P_3$　　$\therefore\ \frac{{}_8P_3}{8^3}=\frac{7\cdot\cancel{6}^{3}}{8\cdot\cancel{8}_{4}}=\mathbf{\frac{21}{32}}$

(10)



$m:n=1:3$とすると

$\triangle OAB$の重心　$\vec{OG}=\frac{\vec{OA}+\vec{OB}}{3}$

GC　を$1:3$に内分する点は　$\frac{3}{4}\times\frac{\vec{OA}+\vec{OB}}{3}+\frac{1}{4}\vec{OC}=\frac{\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}}{4}$

となる. $\triangle OBC$, $\triangle OCA$についても同様

$\triangle ABC$の重心をGとしたときは　$\vec{OG}=\frac{\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}}{3}$

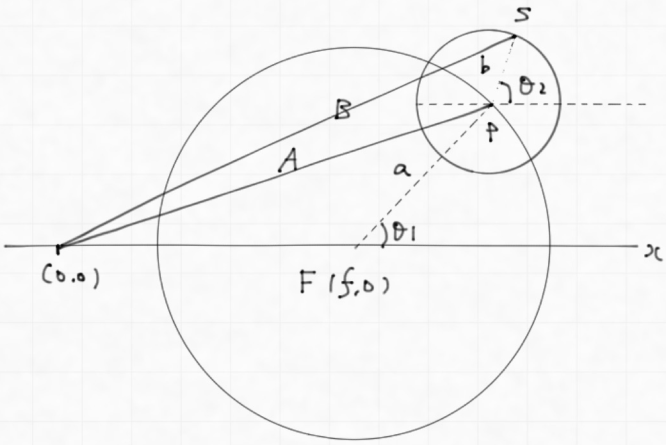
GOを$1:3$に内分する点は　$\frac{3}{4}\vec{OG}=\frac{\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}}{4}$　となり.

これも同じ点となる.　　$\therefore\ m:n=\mathbf{1:3}$

3

(1) $(x_1, y_1) = \vec{OF} + \vec{FP} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} f + a\cos\theta_1 \\ a\sin\theta_1 \end{pmatrix}$$



(2) $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \vec{OF} + \vec{FP} + \vec{PS}$

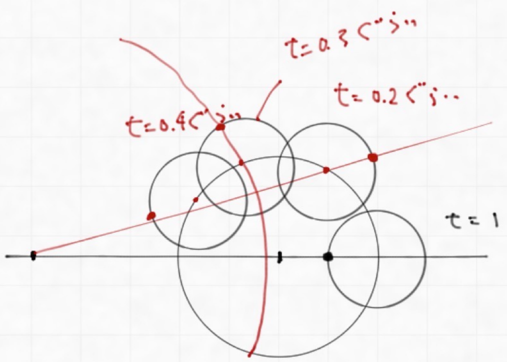
$$= \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f + a\cos\theta_1 + b\cos\theta_2 \\ a\sin\theta_1 + b\sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

(3) $\theta_1 = 2\pi$ となったときに1周するので　$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$

(4) $t=0$ で　$A=7,\ B=6$　となっているが、$t=0$ のとき、$\theta_1 = 0$、だから $\theta_2 = \phi = \pi$

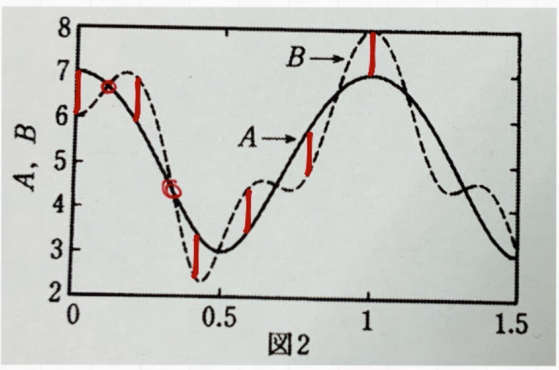
$t=0.5$ まで　Bは1度Aよりも大きく(C_1の外側)に出て、その後原点よりに近付いている



左図を見て、$t=1$ までに Sは2周半することが分かる

$t=1$ のとき、$\theta_1 = 2\pi$、　$\theta_2 = \phi + \omega_2 = \phi + 5\pi$

$\omega_2 = 5\pi$　　$\phi = \pi$



AとBの距離差が1となるとき、O, P, Sの3点が一直線上に並んでいる

(5) $\phi = \pi$、　$\omega_2 = 1 \cdot \omega_1$

(月の運動と同じ。同じ周期で回転すればよい)

(6) $\phi = 0$、　$\omega_2 = 1 \cdot \omega_1$

(7) $\frac{1}{2} T_p$ 秒で C_2 がk周することが必要で、

また、その場合、初期位相がπでないといけない

$\frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_2} \times k$　かつ　$\phi = \pi$

$\omega_2 = 2\omega_1 k$、　$\phi = \pi$

(8) $\phi = \pi$、　Pが2周したとき $2k-1$ 周していればよい

$$\frac{2\pi}{\omega_1} \times 2 = \frac{2\pi}{\omega_2}(2k-1)$$

$$\omega_2 = \frac{(2k-1)\omega_1}{2},\quad \phi = \pi$$

(9) Pとともに回転し、常にFを向いている人から見るとSは　$\theta_2 - \theta_1$ だけ回転するようにみえる

$\theta_2 - \theta_1 = (z\omega_1 - \omega_1)t + \phi = (z-1)\omega_1 t + \phi$　　$0 \leqq \omega_1 t \leqq 2\pi$ のあいだに $z-1$ 回

FとPの間をSが通っていく。

(10) (9)と同様　$\theta_2 - \theta_1 = -(z+1)\omega_1 t + \phi$　　$z+1$ 回

4

(1) $a_{n+1} = pa_n + q^n$ の両辺を p^{n+1} で割る

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + \frac{1}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^n$$

$$\frac{a_n}{p^n} = \frac{a_1}{p^1} + \frac{1}{p}\left(\frac{q}{p}\right) \times \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}}{1-\frac{q}{p}} = \frac{q}{p(q-p)}(1+q-p) + \frac{q}{p}\cdot\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}}{p-q} \quad (n \geqq 2)$$

$$a_n = \frac{qp^{n-1}}{p-q}\left(\cancel{1}-q+p+\cancel{1}-\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right) = qp^{n-1} - \frac{q^n}{p-q} \quad (n \geqq 2)$$

上式で $n=1$ としたときも成り立っている. $\therefore$ $a_n = \mathbf{qp^{n-1} - \frac{q^n}{p-q}}$ $(n \geqq 1)$

(2) $\frac{a_n}{q^n} = \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} - \frac{1}{p-q} \geqq 1$ $\quad \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} \geqq 1 + \frac{1}{p-q} = \frac{p-q+1}{p-q}$ …①

(i) $p > q$ のとき. $\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}$ は n が大きくなるにつれて増加する

したがって $n=1$ で ① が成り立てば全ての自然数 n について ① が成り立つ

$1 \geqq \frac{p-q+1}{p-q} \Leftrightarrow p-q \geqq p-q+1 \Leftrightarrow 0 \geqq 1$ これは成立しない

(ii) $p < q$ のとき $\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ だから. $\frac{p-q+1}{p-q} \leqq 0$ なら. ① が全ての n について成り立つ

$p-q+1 \geqq 0$ $\therefore$ $q-1 \leqq p < q$ これを満たすのは. $p.q$ が自然数であることから $p = q-1$ に限られる $\therefore$ $\mathbf{p = q-1}$

(3) $p = q-1$ かつ $n=1$ のとき.

$$\frac{a_1}{q^1} = \frac{1+q-p}{q-p} = \frac{1+1}{1} = \mathbf{2}$$

(4) $q=10$ だから (2) を満たすのは $p=9$

$$a_n = 10\cdot 9^{n-1} + 10^n$$

$n=3$ のとき. $a_3 = 10\cdot 9^2 + 10^3 = 1810 < 10^4$

$n=4$ のとき $a_4 = 10\cdot 9^3 + 10^4 = 17290 > 10^4$ $\therefore$ $n = \mathbf{3}$