カードの確率

nを2以上の自然数とする。1からnまでの番号が1つずつ書かれたn枚のカードをよく混ぜ、1枚取り出し、それを戻さずにもう1枚を取り出す。

(1) 1枚目に取り出したカードの番号より2枚目の番号の方が小さい確率を求めよ。

(2) 1枚目に取り出したカードの番号より2枚目の番号の方が小さいという条件の下で、2枚目の番号が1である確率を求めよ。

2020 大阪医大（後期）

大阪医大の入試では、問題毎の難易度に差が大きく、そのため易しい問題を確実に解くことが重要となります。この年の問題では、この確率の問題が確実に解かなければならない問題でした。

(1) 2枚を順に取り出すときの取り出し方は ${}_nP_2$

2枚のカードの選び方は ${}_nC_2$，これを大きいものから順に並べると考えれば2枚目の方が小さい並べ方に対応するので もとめる確率は

$$\frac{{}_nC_2 \times 1}{{}_nP_2} = \frac{1}{2}$$

(2) 2枚目が1のとき必ず1枚目のカードの方が大きい番号になる。その選び方は $n-1$通り

よってもとめる条件つき確率は

$$\frac{\dfrac{n-1}{{}_nP_2}}{\dfrac{1}{2}} = \frac{2}{n}$$

仮にカードを5枚とすると…

1枚目

2枚目	1	2	3	4	5
1	/	◎	◎	◎	◎
2	×	/	○	○	○
3	×	×	/	○	○
4	×	×	×	/	○
5	×	×	×	×	/

(1) $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$　　(2) $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

となり上の解答が正しいことが確認できます。

検算できるときは必ず検算するのが原則です。

放物線で囲まれる図形の面積

2つの曲線 $C_1 : y = x^2 - \frac{3}{2}$ と $C_2 : y^2 = -2x + \frac{9}{4}$ を考える。

(1) C_1 と C_2 の共有点をすべてもとめよ。

(2) 2つの領域 $y \geqq x^2 - \frac{3}{2}$ と $y^2 \leqq -2x + \frac{9}{4}$ の共通部分 W の面積 S を求めよ。

2020 大阪医大（後）

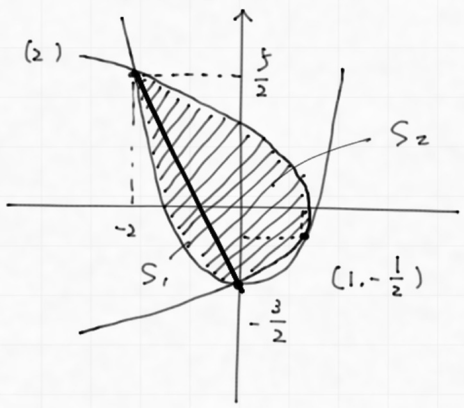
(1) C_1 と C_2 の式を連立 $\left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 = -2x + \frac{9}{4} \iff x^4 - 3x^2 + 2x = 0$

$\iff x(x^3 - 3x + 2) = 0 \iff x(x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \iff x(x-1)^2(x+2) = 0$

$x = 0, 1, -2$. それぞれのときの y は $y = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}$ だから交点は

$(x, y) =$ $\mathbf{\left(-2, \frac{5}{2}\right), \left(0, -\frac{3}{2}\right), \left(1, -\frac{1}{2}\right)}$

(2)



(1) より、C_1 と C_2 のグラフは右のようになっている。
(($1, -\frac{1}{2}$) では接している)

$y \geqq x^2 - \frac{3}{2}$ と $y^2 \leqq -2x + \frac{9}{4}$ の共通部分は

左の通りで、これを $\left(-2, \frac{5}{2}\right), \left(0, -\frac{3}{2}\right)$ を結ぶ線分で

2つの領域に分け、左側を S_1、右側を S_2 とすると、

$$S_1 = \frac{1}{6}(0 - (-2))^3 = \frac{4}{3}$$

$$S_2 = \frac{\frac{1}{2}}{6}\left(\frac{5}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)^3 = \frac{4^3}{12} = \frac{16}{3}$$

$$W = S_1 + S_2 = \frac{4}{3} + \frac{16}{3} = \mathbf{\frac{20}{3}}$$

グラフを丁寧に書くことが大切です。

共有点のうち、$\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ は $x=1$ が重解だったので接点です。

2020 大阪医大（後期）

2

(1) $x \neq 0$ のとき　$-1 \leqq \sin\frac{1}{x^b} \leqq 1$ だから　$0 \leqq \left|\sin\frac{1}{x^b}\right| \leqq 1$　より　$0 \leqq \left|x^a \sin\frac{1}{x^b}\right| \leqq |x^a|$

$\lim_{x \to 0}|x^a| = 0$ だから はさみうちの原理より　$\lim_{x \to 0}\left|x^a \sin\frac{1}{x^b}\right| = 0$

すなわち $\lim_{x \to 0}|f(x)| = 0$ であり，$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to -0} f(x) = 0$　…①

また $f(0) = 0$ …②　なので　①②　より　$f(x)$ は $x=0$ で連続である.

(2) $x \neq 0$ のとき

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0}\frac{(x+h)^a \sin\frac{1}{(x+h)^b} - x^a \sin\frac{1}{x^b}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}\left\{\frac{x^a\left(\sin\frac{1}{(x+h)^b} - \sin\frac{1}{x^b}\right)}{h} + \frac{x^{a-1}\cancel{h}\cdot a\left(\sin\frac{1}{(x+h)^b}\right)}{\cancel{h}} + \frac{a C_2 \cdot x^{a-2} h^{\cancel{2}}\left(\sin\frac{1}{(x+h)^2}\right)}{\cancel{h}} + \cdots\right\} = (*)$$

ここで　$\frac{1}{h}\left(\sin\frac{1}{(x+h)^b} - \sin\frac{1}{x^b}\right) = \frac{1}{h} \times 2\cos\frac{\frac{1}{(x+h)^b} + \frac{1}{x^b}}{2} \times \sin\frac{\frac{1}{(x+h)^b} - \frac{1}{x^b}}{2}$

$$= 2\cos\frac{\frac{1}{(x+h)^b} + \frac{1}{x^b}}{2} \times \frac{\sin\frac{\frac{1}{(x+h)^b} - \frac{1}{x^b}}{2}}{\frac{\frac{1}{(x+h)^b} - \frac{1}{x^b}}{2}} \times \frac{\frac{1}{(x+h)^b} - \frac{1}{x^b}}{2h}$$

$\sin A - \sin B$
$= 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

$$= 2\cos\frac{\frac{1}{(x+h)^b} + \frac{1}{x^b}}{2} \times \frac{\sin\frac{\frac{1}{(x+h)^b} - \frac{1}{x^b}}{2}}{\frac{\frac{1}{(x+h)^b} - \frac{1}{x^b}}{2}} \times \frac{\cancel{x^b} - \cancel{x^b} - b x^{b-1}\cancel{h} - b C_2 x^4 h^{\cancel{2}} - \cdots}{2(x+h)^b x^b \cancel{h}}$$

$$\longrightarrow \cancel{2}\cos\frac{1}{x^b} \times 1 \times \frac{-b x^{b-1}}{\cancel{2}x^{2b}} = -\frac{b}{x^{b+1}}\cos\frac{1}{x^b}$$

だから

$$(*) = -\frac{b x^a}{x^{b+1}}\cos\frac{1}{x^b} + a x^{a-1}\sin\frac{1}{x^b}$$

また $x = 0$ のとき

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0}\frac{h^a \sin\frac{1}{h^b} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h^{a-1}\sin\frac{1}{h^b}$$

$-1 \leqq \sin\frac{1}{h^b} \leqq 1$　だから　$-h^{a-1} \leqq h^{a-1}\sin\frac{1}{h^b} \leqq h^{a-1}$　であり

$\lim_{h \to 0}(-h)^{a-1} = \lim_{h \to 0}(h)^{a-1} = 0$ なので，はさみうちの原理より　$\lim_{h \to 0} h^{a-1}\sin\frac{1}{h^b} = 0$.

以上より $f(x)$ は すべての x で微分可能であり

$$f'(x) = \begin{cases} a x^{a-1}\sin\frac{1}{x^b} - b x^{a-b-1}\cos\frac{1}{x^b} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

(3)

$$f'(x) = \begin{cases} a x^{a-1} \sin \frac{1}{x^b} - b x^{a-b-1} \cos \frac{1}{x^b} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a h^{a-1} \sin \frac{1}{h^b} - b h^{a-b-1} \cos \frac{1}{h^b} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(a h^{a-2} \sin \frac{1}{h^b} - b h^{a-b-2} \cos \frac{1}{h^b} \right) = (**)$$

$a \geqq b+3$ だから. $a-2 \geqq b+3-2 = b+1 \geqq 2$,

$a-b-2 \geqq b+3-b-2 = 1$

であり また

$$-a h^{a-2} - b h^{a-b-2} \leqq a h^{a-2} \sin \frac{1}{h^b} - b h^{a-b-2} \cos \frac{1}{h^b} \leqq a h^{a-2} + b h^{a-b-2}$$

および $\lim_{h \to 0} \pm \left(a h^{a-2} + b h^{a-b-2} \right) = 0$ より. はさみうちの原理より.

$(**) = 0$

よって $f'(x)$ は $x = 0$ で微分可能で. $f''(x) = 0$

(2) について

$x \neq 0$ のとき 微分可能であることについては「明らか」としても良いと思います.

その場合.

$x \neq 0$ のとき. $f(x)$ が微分可能なのは明らか.

$$f'(x) = \left(x^a \sin \frac{1}{x^b} \right)' = a x^{a-1} \sin \frac{1}{x^b} + x^a \cos \frac{1}{x^b} \times (-b) x^{-b-1}$$

$$= a x^{a-1} \sin \frac{1}{x^b} - b x^{a-b-1} \cos \frac{1}{x^b}$$

となります.

有理数と無理数

p, q を素数とし、$p \neq q$ とする

(1) $p^x = q^y$ を満たす有理数 x, y をもとめよ。

(2) $\log_p q$ は無理数であることを示せ。

(3) a, b, c, d を 0 でない有理数とし、$m = p^a q^b$, $n = p^c q^d$ とする。$\log_m n$ が有理数であるための a, b, c, d の条件を求め、そのときの $\log_m n$ の値を a, b, c, d を用いて表せ。

2020 大阪医大（後期）

(1) $x = \dfrac{x_2}{x_1}$, $y = \dfrac{y_2}{y_1}$ とする.（x_1, y_1 は自然数, x_2, y_2 は整数, x_1 と x_2 および y_1 と y_2 は互いに素）

$$p^{\frac{x_2}{x_1}} = q^{\frac{y_2}{y_1}}$$

両辺を $x_1 y_1$ 乗すると $p^{y_1 x_2} = q^{x_1 y_2}$ …(*)

- $y_1 x_2 > 0$ のとき、左辺は p の倍数だが右辺は p の倍数ではないので (*) は成立しない
- $y_1 x_2 < 0$ のとき. $p^{y_1 x_2} < 1$ なので $x_1 y_2 < 0$ であり (*) は $p^{-y_1 x_2} = q^{-x_1 y_2}$ と変形できる
  これは左辺が p の倍数だが右辺は p の倍数ではないので (*) は成立しない
- $y_1 x_2 = 0$ のとき. $y_1 \neq 0$ なので. $x_2 = 0$ このとき (*) は $q^{x_1 y_2} = 1$ となり $x_1 y_2 = 0$

$x_1 \neq 0$ なので $y_2 = 0$.

以上より $x = 0, y = 0$ のときのみ $p^x = q^y$ は成り立つことが分かる. $(x, y) = (0, 0)$

(2) $\log_p q$ が有理数であると仮定すると

$\log_p q = \dfrac{n}{m}$ とおくことができる（m, n は互いに素な整数で $m \geqq 1$ とする）

上式より $\dfrac{n}{m} = \log_p p^{\frac{n}{m}}$ なので $q = p^{\frac{n}{m}}$

両辺を m 乗して $q^m = p^n$

(1) より. これを満たす m, n は $m = n = 0$ に限られるが. これは $m \geqq 1$ に反する

$\therefore \log_p q$ は有理数ではなく したがって無理数である.

(3) $\log_m n = \log_{p^a q^b} p^c q^d = \dfrac{\log_p p^c q^d}{\log_p p^a q^b} = \dfrac{c + d \log_p q}{a + b \log_p q}$

$b \neq 0$ だから

$$\log_m n = \frac{d}{b} + \frac{c - \frac{ad}{b}}{a + b \log_p q}$$

これは $c - \dfrac{ad}{b} = 0$ すなわち $\mathbf{ad - bc = 0}$ のとき有理数となり $\log_m n = \dfrac{d}{b} \left(= \dfrac{c}{a} \right)$

直円錐

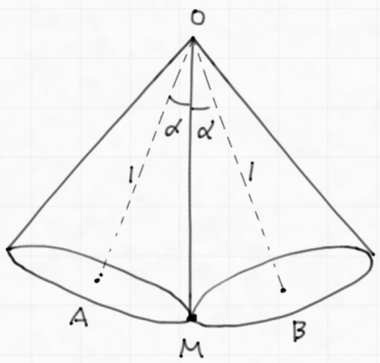
2つの合同な直円錐 U, V よりなる立体 W がある。U, V は頂点 O を共有し、それぞれの底面の円 A, B はただ1点 M を共有していて母線 OM のみが U, V の共通部分である。また、A, B の中心を A, B とすると、OA = OB = 1 であり、$\angle AOM = \angle BOM = \alpha \ (0 < \alpha < \frac{\pi}{4})$ である。

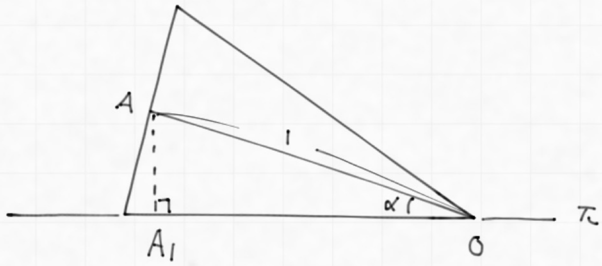
この立体 W を水平面 π 上に横たえる。π と U, V それぞれの共通部分を通る直線を l, m とする。A, B から l, m に下ろした垂線の足を A_1, B_1 とし、$\angle A_1OB_1 = 2\theta$ とする。
なお、以下の問いに答える際に、4点 O, A, M, B が同一平面上にあることと、AA_1, BB_1 が水平面 π に垂直であることは証明しなくてよい。

(1) 内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ を α を用いて表せ。 (2) 内積 $\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_1}$ を α, θ を用いて表せ。

(3) $\sin\theta$ を α で表せ。

2020 大阪医大（後期）





(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB = 1\cdot1\cdot\cos2\alpha = \mathbf{\cos 2\alpha}$

(2) 左下図より

$$|\overrightarrow{OA_1}| = \cos\alpha = |\overrightarrow{OB_1}|$$

$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_1} = |\overrightarrow{OA_1}||\overrightarrow{OB_1}|\cos2\theta = \mathbf{\cos^2\alpha\cos2\theta}$$

(3) 左図より $\quad |\overrightarrow{AA_1}| = \sin\alpha = |\overrightarrow{BB_1}|$

$$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{OA} = \sin\alpha\cdot1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin^2\alpha = \overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{OB} \quad \cdots①$$

$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_1} = (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA_1})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BB_1})$$
$$= \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BB_1}$$

ここで $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$ だから

$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_1} = \cos2\alpha + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BB_1} + |\overrightarrow{AA_1}|^2$$
$$= \cos2\alpha - 2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha \quad (\because ①)$$
$$= 1 - 3\sin^2\alpha$$
$$= \cos^2\alpha\cos2\theta \quad (\because (2))$$

$$\cos2\theta = \frac{1-3\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$1-2\sin^2\theta = \frac{1-3\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\sin^2\theta = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\therefore \quad \sin\theta = \mathbf{\tan\alpha}$$